Übungen zur Vorlesung **Stochastic Analysis with Rough Paths**

Blatt 1

apl. Prof. Dr. Stefan Tappe – WS 2017/18

**Aufgabe 1.** Es seien $H$, $G$ separable Hilberträume mit Orthonormalbasen $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Weiterhin sei $\mathrm{HS}(H,G)$ der Raum aller Hilbert-Schmidt-Operatoren $T : H \to G$, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle T, S\rangle_{\mathrm{HS}} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle Te_i, Se_i\rangle.$$

(a) Für $x \in H$ und $y \in G$ definieren wir $x \otimes y \in \mathrm{HS}(H,G)$ durch

$$x \otimes y := \langle x, \cdot\rangle y.$$

Zeigen Sie, dass

$$\|x \otimes y\|_{\mathrm{HS}} = \|x\|\,\|y\| \quad \text{für alle } x \in H \text{ und } y \in G.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\{e_i \otimes f_j : (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{HS}(H,G)$ ist. (Folglich ist $\mathrm{HS}(H,G)$ auch ein separabler Hilbertraum.)

(c) Zeigen Sie, dass $L^{(2)}(H \times G, F) \simeq L(\mathrm{HS}(H,G), F)$ für jeden weiteren separablen Hilbertraum $F$. (Folglich ist $\mathrm{HS}(H,G)$ eine Version des Hilbertraum-Tensorprodukts $H \otimes G$.)

(d) Es seien $(\Omega_i, \mathscr{F}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$ zwei $\sigma$-endliche Maßräume, und es seien $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Orthonormalbasen von $L^2(\Omega_i, \mathscr{F}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass

$$\{(\xi, \eta) \mapsto e_i(\xi) f_j(\eta) : (i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$$

eine Orthonormalbasis von $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ ist, und folgern Sie

$$L^2(\Omega_1, \mathscr{F}_1, \mu_1) \otimes L^2(\Omega_2, \mathscr{F}_2, \mu_2) \cong L^2(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2, \mu_1 \otimes \mu_2).$$

(e) Folgern Sie, dass $\ell^2(I) \otimes \ell^2(J) \cong \ell^2(I \times J)$ für zwei abzählbare Mengen $I, J$.

**Aufgabe 2.** Es sei $V$ ein Banachraum.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in V \otimes V$ folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $x$ ist symmetrisch.

(ii) $\mathrm{Sym}(x) = x$.

(iii) $x \in \ker(\mathrm{Anti})$.

(b) Zeigen Sie, dass Sym und Anti stetige lineare Projektionen sind.

(c) Zeigen Sie, dass $V \otimes V = \ker(\mathrm{Anti}) \oplus \ker(\mathrm{Sym})$.

**Aufgabe 3.** Es seien $X$ und $Y$ zwei Prozesse.

(a) Die Prozesse $X$ und $Y$ seien ununterscheidbar. Zeigen Sie, dass $X$ eine Version von $Y$ ist.

(b) Die Prozesse $X$ und $Y$ seien stetig, und $X$ sei eine Version von $Y$. Zeigen Sie, dass $X$ und $Y$ ununterscheidbar sind.

**Aufgabe 4.**

(a) Zeigen Sie, dass $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ eine symmetrische, bilineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass für zwei stetige Semimartingale $X$ und $Y$ gilt

$$XY = X_0 Y_0 + X \circ Y + Y \circ X.$$