Übungen zur Vorlesung
"Mehrfachintegrale"

Wintersemester 2017/18, Blatt 1

Abgabetermin: 19.01.2018, bis 10:00 Uhr in das Fach Ihres Tutors (Nr. 2.1-2.4), UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Bitte geben Sie einzeln ab.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Jede Teilmenge einer Jordan-Nullmenge ist eine Jordan-Nullmenge.

b) Die Vereinigung zweier Jordan-Nullmengen ist eine Jordan-Nullmenge.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass das Quadrat mit den Eckpunkten $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ in $\mathbb{R}^2$ Jordan-messbar ist. Bestimmen Sie die Fläche, indem Sie die Grenzwerte für das innere und äußere Maß explizit berechnen.

b) Ist jede endliche Teilmenge in $\mathbb{R}^2$ Jordan-messbar? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Teilmengen. Zeigen Sie:

a) Es gilt $\partial(A \cup B) \subseteq \partial A \cup \partial B$

b) Wenn A und B Jordan-messbar sind, ist auch $A \cup B$ Jordan-messbar.

c) In diesem Fall gilt

$$\mathrm{vol}^n(A \cup B) = \mathrm{vol}^n(A) + \mathrm{vol}^n(B) - \mathrm{vol}^n(A \cap B)$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-Nullmenge. Zeigen Sie: Ist $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, so dass $A \backslash N \subseteq B \subseteq A \cup N$ gilt, dann ist B Jordan-messbar und $\mathrm{vol}^n(A) = \mathrm{vol}^n(B)$.

b) Zeigen Sie, dass jede beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die höchstens endlich viele Häufungspunkte besitzt, eine Jordan-Nullmenge ist.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2017-18/vorlesung-mehrfachintegrale-ws-2017-18`