

# Übungen zur Vorlesung “Mehrfachintegrale“

Wintersemester 2017/18, Blatt 3

**Abgabetermin:** 02.02.2018, bis 10:00 Uhr in das Fach Ihres Tutors (Nr. 2.1-2.4), UG  
Eckerstr. 1

(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.  
Bitte geben Sie einzeln ab.)

## Aufgabe 9 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Masse und den Schwerpunkt (siehe Bemerkung 2.8) des Quaders

$$K = [1, 2] \times [0, \pi/2] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^3$$

mit Dichte  $\varrho(x, y, z) = y \sin(xy)$  für alle  $(x, y, z) \in K$ .

## Aufgabe 10 (4 Punkte)

Es sei  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  Jordan-messbar und für  $r > 0$  und  $h > 0$  sei

$$rA = \{ (rx, ry) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in A \} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z \leq h \text{ und } (x, y) \in zA \} \subseteq \mathbb{R}^3$$

- Zeigen Sie, dass  $rA$  Jordan-messbar ist mit  $\text{vol}^2(rA) = r^2 \text{vol}^2 A$ .
- Zeigen Sie, dass  $K$  Jordan-messbar ist mit  $\text{vol}^3(K) = \frac{h^3}{3} \text{vol}^2 A = \frac{h}{3} \text{vol}^2(hA)$ .
- Folgern Sie das Volumen der dreidimensionalen Einheitskugel.

## Aufgabe 11 (4 Punkte)

Berechnen Sie das Volumen der  $n$ -dimensionalen Kugel mit Radius  $R$  per Induktion nach der Dimension von  $n$  nach  $n+2$ . Die Werte für  $n = 1, 2$  dürfen als bekannt vorausgesetzt werden.  
HINWEIS: Anwendung einer Folgerung aus dem Satz von Fubini.

## Aufgabe 12 (4 Punkte)

Es sei  $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-y)}{(x+y)^3} & \text{falls } x \in [0, 1]^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Zeigen Sie, dass die folgenden Integrale (im Sinne der Analysis I/II) existieren und berechnen Sie diese:

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx.$$

- Ist  $f$  Riemann-integrierbar über  $[0, 1]^2$ ? Falls ja, berechnen Sie den Wert des Integrals.
- Ist  $f$  uneigentlich Riemann-integrierbar über  $[0, 1]^2$ ? Falls ja, berechnen Sie den Wert des Integrals.

Begründen Sie Ihre Antworten.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:

<https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2017-18/vorlesung-mehrfachintegrale-ws-2017-18>