Übungen zur Vorlesung
“Mehrfachintegrale“

Wintersemester 2017/18, Blatt 4

Abgabetermin: 09.02.2018, bis 10:00 Uhr in das Fach Ihres Tutors (Nr. 2.1-2.4), UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte geben Sie einzeln ab.)

Hinweis: Sie dürfen Satz 4.3 aus dem Skript verwenden.

Aufgabe 13 (4 Punkte)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ das von den Vektoren

$$v := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad w := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Parallelogramm.

a) Skizzieren Sie die Menge Ω.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_\Omega 12x \, dxdy$$

durch Verwendung einer geeigneten Koordinatentransformation.

Aufgabe 14 (4+2 Punkte)

Betrachten Sie die Abbildung

$$F : (0,\infty) \times (0,2\pi) \times (0,\pi) \to \mathbb{R}^3$$
$$(r,\phi,\psi) \mapsto (r\cos(\phi)\sin(\psi), r\sin(\phi)\sin(\psi), r\cos(\psi)) \; .$$

a) Bestimmen Sie das Bild $\text{im}\,(F)$.

b) Bestimmen Sie die Jacobi-Determinante $|\det dF(r,\phi,\psi)|$.

c) Zeigen Sie, dass $F : (0,\infty) \times (0,2\pi) \times (0,\pi) \to \text{im}\,(F)$ ein Diffeomorphismus ist. Geben Sie die Umkehrabbildung an.

d) Für welche $a \in \mathbb{R}$ existiert das uneigentliche Integral

$$\int_{B_R} (x^2+y^2+z^2)^{\frac{a}{2}} \, dxdydz \; ?$$

Berechnen Sie es gegebenenfalls mit den oben angegebenen Koordinaten.

(bitte wenden)

Aufgabe 15 (4 Punkte)

a) Berechnen Sie das Volumen eines Ellipsoids, d.h. einer Menge der Form

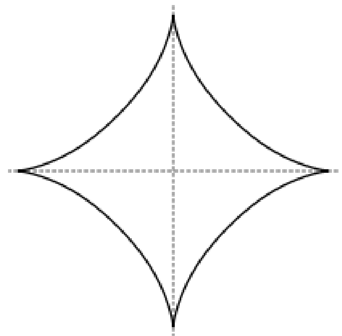
$$A := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \right\},$$

wobei $a, b, c > 0$ beliebige Konstanten sind.

b) Es sei $a > 0$. Eine Astroide ist durch die Parametergleichungen

$$x = a(\cos(t))^3,$$
$$y = a(\sin(t))^3$$

für $t \in [0, 2\pi]$ gegeben, wobei $a > 0$ eine beliebige Konstante ist. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der eingeschlossenen Fläche.



https://en.wikipedia.org/wiki/Astroid#/media/File:Astroid.svg

Aufgabe 16 (4 Punkte)

Es sei $a > 0$.

a) Bestimmen Sie $c_a \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} c_a e^{-ax^2} \, dx = 1 \ .$$

b) Berechnen Sie die Varianz

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 c_a e^{-ax^2} \, dx \ .$$

Für welchen Wert von a ist die Varianz genau 1?

Hinweis: Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^2$ die Funktion $(x^2+y^2)e^{-a(x^2+y^2)}$.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2017-18/vorlesung-mehrfachintegrale-ws-2017-18`