Übungen zur Vorlesung
“Mehrfachintegrale“

Wintersemester 2017/18, Blatt 2

Abgabetermin: 26.01.2018, bis 10:00 Uhr in das Fach Ihres Tutors (Nr. 2.1-2.4), UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Bitte geben Sie einzeln ab.)

Aufgabe 5 (4+1 Punkte)

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit kompaktem Träger. Zeigen Sie:

a) Für $f \geq 0$ gilt

$$s_k(\mathbf{1}_A \cdot f) \geq \inf_{x\in A} f(x) \cdot m_k(A) \text{ und } s^k(\mathbf{1}_A \cdot f) \leq \sup_{x\in A} f(x) \cdot m^k(A).$$

b) Es gilt

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^n}} \mathbf{1}_A(x)\, d^n x = m_*(A) \text{ und } \overline{\int_{\mathbb{R}^n}} \mathbf{1}_A(x)\, d^n x = m^*(A).$$

Daraus folgt, dass die Menge A genau dann Jordan-messbar ist, wenn die Funktion 1 Riemann-integrierbar über A ist. Dann gilt

$$\int_A 1\, d^n x = \mathrm{vol}^n(A).$$

c) Für jede Jordan-Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $\int_N f(x)\, d^n x = 0$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Es seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Zeigen Sie:

a) Es sei f Riemann-integrierbar über $C \subseteq \mathbb{R}^n$ und $A \subseteq C$. Dann ist f auch Riemann-integrierbar über A.

b) Es sei f Riemann-integrierbar über A und über B. Dann ist f auch Riemann-integrierbar über $A \cap B$ und $A \cup B$, und es gilt

$$\int_{A\cup B} f(x)\, d^n x = \int_A f(x)\, d^n x + \int_B f(x)\, d^n x - \int_{A\cap B} f(x)\, d^n x$$

c) Es sei f beschränkt und Riemann-integrierbar über A und über B, sowie $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-Nullmenge mit $A \setminus N \subseteq B \subseteq A \cup N$. Dann gilt $\int_A f(x)\, d^n x = \int_B f(x)\, d^n x$.

(bitte wenden)

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Es sei $A = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$. Entscheiden Sie für jede der folgenden Funktionen, ob sie Riemann-integrierbar über A ist oder nicht. Begründen Sie Ihre Antworten.

a) $f(x,y) = 1$ falls $x \in \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{Q}$, und 0 sonst.

b) $f(x,y) = 1$ falls $x \in \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{Q}$ und $x = y$, und 0 sonst.

c) $f(x,y) = \frac{1}{q+s}$ falls $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ und $y = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ gekürzte Brüche (Betrachte 0 als $0 = \frac{0}{1}$) sind, und 0 sonst.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Analog zum Riemann-Integral betrachten wir zwei Operationen, die geeigneten Teilmengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Zahl in $\mathbb{R}$ zuordnen:

a) Für Punkte $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n$ und reelle Zahlen $r_1, ..., r_N \geq 0$ definieren wir *die gewichtete Summe über A* als $\mathcal{F}_A(f) = \sum_{i=1}^N r_i(\mathbf{1}_A \cdot f)(x_i)$.

b) Für eine stetige und beschränkte Funktion $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ nennen wir f *gewichtet integrierbar über A* mit $\mathcal{G}_A(f) = \int_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{1}_A \cdot \varrho \cdot f)(x)d^n x$, wenn das Integral existiert.

Zeigen Sie für a) *oder* b), dass die Eigenschaften (1) bis (4) aus Proposition 2.3 gelten.