Übungen zur Vorlesung
“Mehrfachintegrale“

Wintersemester 2017/18

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe A

Es sei $f : [a, b] \to [0, \infty)$ Riemann-integrierbar im Sinne der Analysis I/II. Zeigen Sie, dass

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in [a, b], y \in [0, f(x)] \right\}$$

Jordan-messbar ist mit

$$\mathrm{vol}^2(A) = \int_a^b f(x) dx.$$

Aufgabe B

Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $m \geq 1$ und $F : K \to \mathbb{R}^m$ stetig. Wir betrachten den Graph

$$\mathrm{graph}(F) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \;\middle|\; x \in K, y = F(x) \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{graph}(F)$ eine Jordan-Nullmenge ist.

Hinweis: Vergewissern Sie sich anhand des Analysis II-Skriptes, dass F beschränkt und gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe C

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Teilmenge und $f : A \mapsto \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. Zeigen Sie, dass für die Bildmenge

$$m^*\big(f(A)\big) \leq \alpha \cdot m^*\big(A\big) \text{ mit } \alpha = (2L\sqrt{n})^n$$

gilt. Insbesondere ergibt sich aus $\mathrm{vol}^n\big(A\big) = 0$, dass auch $\mathrm{vol}^n\big(f(A)\big) = 0$ ist.