Übungen zur Vorlesung
"Mathematische Statistik"

Blatt 9

Abgabetermin: Montag, 18.12.2017, bis 14:00 Uhr im Briefkasten im UG Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Wir erinnern uns an die Begrifflichkeiten und Methoden der "Empirischen Prozesse" von Übungsblatt 8. Die ε-*bracketing-Zahl* von $\mathcal{F}$ in $\|\cdot\|$-Norm, $N_{[\,]}(\varepsilon,\mathcal{F},\|\cdot\|)$, ist die minimale Anzahl m von ε-brackets $[l_i,u_i]$, $i=1,\dots,m$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$, so dass $\mathcal{F}\subseteq\bigcup_{i=1}^m[l_i,u_i]$. Dabei müssen die l_i und u_i nicht notwendigerweise Elemente von $\mathcal{F}$ sein. Außerdem sei

$$J_{[\,]}(\varepsilon,\mathcal{F},\|\cdot\|)=\int_0^\delta\sqrt{\log N_{[\,]}(\varepsilon,\mathcal{F},\|\cdot\|)}\,d\varepsilon,$$

das sogenannte *bracketing-Integral*. Mit P^* und $\mathbb{E}_P^*$ bezeichnen wir das äußere Maß von P sowie die zugehörige äußere Erwartung.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{F}$ eine Klasse von messbaren Funktionen $f:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ mit einer Einhüllenden F und so, dass $N_{[\,]}(\varepsilon,\mathcal{F},\|\cdot\|_{L_2(P)})<\infty$ für alle $\varepsilon>0$ und $Pf^2\le\delta^2$ für alle $f\in\mathcal{F}$. Weiter sei $q_0\in\mathbb{Z}$ eine ganze Zahl, so dass $4\delta\le 2^{-q_0}\le 8\delta$. Zeigen Sie, dass es eine durch $q\ge q_0$ indizierte Folge von geschachtelten Partitionen $\mathcal{P}_q=\{\mathcal{F}_{q,1},\dots,\mathcal{F}_{q,N_q}\}$ von $\mathcal{F}$ (also $\forall i\in\{1,\dots,N_{q+1}\}:\exists j\in\{1,\dots,N_q\}:\mathcal{F}_{q+1,i}\subseteq\mathcal{F}_{q,j}$), sowie messbare Funktionen $\Delta_{q,i}\le 2F$ gibt, so dass

$$\sum_{q\ge q_0}2^{-q}\sqrt{\log N_q}\;\lesssim\;\int_0^\delta\sqrt{\log N_{[\,]}(\varepsilon,\mathcal{F},\|\cdot\|_{L_2(P)})}\,d\varepsilon,$$

$$\sup_{f,g\in\mathcal{F}_{q,i}}|f-g|\le\Delta_{q,i},\quad P\Delta_{q,i}^2<2^{-2q}.$$

Zeigen Sie insbesondere, dass für $a(\delta)=\delta/\sqrt{\log N_{[\,]}(\delta,\mathcal{F},\|\cdot\|_{L_2(P)})}$ gilt

$$2a(\delta)\;\le\;\frac{2^{-q_0}}{\sqrt{\log N_{q_0+1}}}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Existenz einer Folge von nicht notwendigerweise geschachtelten Partitionen und verfeinern Sie anschließend die so erhaltene Folge.

(bitte wenden)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Situation von Aufgabe 1 und wählen Sie für jedes $q \geq q_0$ und $i \in \{1, \dots, N_q\}$ ein Element $f_{q,i} \in \mathcal{F}_{q,i}$. Definieren Sie

$$\pi_q f = f_{q,i}, \qquad \Delta_q f = \Delta_{q,i}, \qquad \text{falls } f \in \mathcal{F}_{q,i},$$

und

$$\begin{aligned} a_q &= 2^{-q}/\sqrt{\log N_{q+1}}, \\ A_q f &= \mathbb{1}_{\{\Delta_{q_0} f \leq \sqrt{n} a_{q_0}, \dots, \Delta_q f \leq \sqrt{n} a_q\}}, \\ B_{q+1} f &= \mathbb{1}_{\{\Delta_{q_0} f \leq \sqrt{n} a_{q_0}, \dots, \Delta_q f \leq \sqrt{n} a_q,\, \Delta_{q+1} f > \sqrt{n} a_{q+1}\}}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass im Fall $F \leq \sqrt{n} a(\delta)$ die folgende punktweise Darstellung gilt:

$$f - \pi_{q_0} f \quad = \quad \sum_{q=q_0+1}^{\infty} (f - \pi_q f) B_q f \; + \sum_{q=q_0+1}^{\infty} (\pi_q f - \pi_{q-1} f) A_{q-1} f.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie von messbaren Funktionen $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ mit einer Einhüllenden F, so dass $P f^2 \leq \delta^2$ für alle $f \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie, dass mit $a(\delta) = \delta / \sqrt{\log N_{[\,]}(\delta, \mathcal{F}, \|\cdot\|_{L_2(P)})}$, gilt

$$\mathbb{E}_P^* \|\mathbb{G}_n\|_{\mathcal{F}} \;\lesssim\; J_{[\,]}(\delta, \mathcal{F}, \|\cdot\|_{L_2(P)}) + \sqrt{n} P F \mathbb{1}_{\{F > \sqrt{n} a(\delta)\}}.$$

Hinweis: Zerlegen Sie $\mathbb{G}_n f = \mathbb{G}_n f \mathbb{1}_{\{F > \sqrt{n} a(\delta)\}} + \mathbb{G}_n f \mathbb{1}_{\{F \leq \sqrt{n} a(\delta)\}}$ und verwenden Sie die Aufgaben 8.4, 9.1 und 9.2.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Verwenden Sie die Charakterisierung der P-Donsker Eigenschaft von $\mathcal{F}$ durch die asymptotische stochastische Gleichstetigkeit, um den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 0.1. *Jede Familie $\mathcal{F}$ von messbaren Funktionen mit $\sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x) - Pf| < \infty$ für jedes $x \in \mathcal{X}$ und $J_{[\,]}(1, \mathcal{F}, \|\cdot\|_{L_2(P)}) < \infty$ ist P-Donsker.*