Übungen zur Vorlesung "Mathematische Statistik"

Blatt 8

Abgabetermin: Montag, 11.12.2017, bis 14:00 Uhr im Briefkasten im UG Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Wir erinnern uns an die Begrifflichkeiten und Methoden der "Empirischen Prozesse". Es sei $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ ein messbarer Raum und $\mathcal{F}$ eine Familie von reellwertigen messbaren Funktionen auf $\mathcal{X}$. Für ein W-Maß P auf $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ und eine P-integrierbare Funktion $f \in \mathcal{F}$ schreiben wir auch $Pf := \int f\,dP$. Für unabhängig identisch nach P verteilte Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ bezeichnen wir mit $\hat{P}_n$ die zugehörige empirische Verteilung und mit $\mathbb{G}_n := \sqrt{n}(\hat{P}_n - P)$ den empirischen Prozess. Weiter seien $\phi_{n1}, \ldots, \phi_{ni}$ unabhängige reellwertige stochastische Prozesse mit Indexmenge $\mathcal{F}$ und $Z_n := \sum_{i=1}^n \phi_{ni}$. Für $\phi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ schreiben wir $\|\phi\| := \|\phi\|_{\mathcal{F}} := \sup_{f \in \mathcal{F}} |\phi(f)|$. Für eine Familie $\mathcal{D}$ von Teilmengen von $\mathcal{X}$ und ein $E \subseteq \mathcal{X}$ schreiben wir $\mathcal{D} \cap E := \{D \cap E : D \in \mathcal{D}\}$ und $\Delta(E, \mathcal{D}) := \#(\mathcal{D} \cap E)$. Die Familie $\mathcal{D}$ heißt *Vapnik-Červonenkis-Klasse* (VC-Klasse), falls $V(\mathcal{D}) := \sup\{\#A : A \subseteq \mathcal{X}, \Delta(A, \mathcal{D}) = 2^{\#A}\} < \infty$. Sei ρ eine Pseudo-Metrik auf $\mathcal{F}$, dann definieren wir für $\varepsilon > 0$ die *Überdeckungszahl* von $\mathcal{F}$ als $N(\varepsilon, \mathcal{F}, \rho) := \min\{\#\mathcal{F}_0 : \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}, \rho(f, \mathcal{F}_0) \leq \varepsilon \text{ für alle } f \in \mathcal{F}\}$, wobei $\rho(f, \mathcal{F}_0) := \inf_{g \in \mathcal{F}_0} \rho(f, g)$. Wir nehmen an, dass $\mathcal{F}$ eine *Einhüllende* $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ besitzt, dass heißt F ist messbar und es gilt $|f| \leq F$ für alle $f \in \mathcal{F}$. Für ein Maß M auf $\mathcal{X}$ setzen wir $\rho_M(f, g) := \int |f - g|\,dM$. Der *Subgraph* einer Funktion $f \in \mathcal{F}$ ist definiert als $\mathrm{sgr}(f) := \{(x, r) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} : r \leq f(x)\}$ und $\mathrm{sgr}(\mathcal{F}) := \{\mathrm{sgr}(f) : f \in \mathcal{F}\}$.
Wir erinnern uns weiter an die folgenden Resultate.

Satz 0.1. *Sei $\mathcal{G}$ ein endlichdimensionaler Vektorraum von reellen Funktionen auf $\mathcal{X}$. Dann ist*

$$\mathcal{D} := \{\{x \in \mathcal{X} : 0 \leq g(x)\} : g \in \mathcal{G}\}$$

eine VC-Klasse mit $V(\mathcal{D}) \leq \dim(\mathcal{G})$.

Satz 0.2. *Angenommen sgr($\mathcal{F}$) ist eine VC-Klasse und $\int F\,dM = 1$. Dann ist*

$$\log N(\varepsilon, \mathcal{F}, \rho_M) \leq V(sgr(\mathcal{F}))(\log(e/\varepsilon) + \log\log(e/\varepsilon) + 3),$$

für beliebiges $\varepsilon \in (0, 1]$.

Satz 0.3. *Angenommen $\|\phi_{ni}\|_{\mathcal{F}} \leq \delta_n$ für alle i. Weiter sei $V_n := \sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbb{E} \sum_{i=1}^n \phi_{ni}(f)^2$. Dann ist für beliebige $\eta \geq \sqrt{2V_n}$ und $\tau \geq 2V_n$,*

$$P\left(\|Z_n - \mathbb{E}Z_n\|_{\mathcal{F}} \geq 3\eta\right) \leq 16\mathbb{E}\min\left(N\left(\frac{\tau}{16\delta_n}, \mathcal{F}, \hat{\rho}_n\right)\exp\left(-\frac{\tau}{8\delta_n^2}\right), 1\right) + 8\mathbb{E}\min\left(N\left(\frac{\eta}{2}, \mathcal{F}, \hat{\rho}_n\right)\exp\left(-\frac{\eta^2}{64\tau}\right), 1\right),$$

wobei $\hat{\rho}_n(f, g) := \sum_{i=1}^n |\phi_{ni}(f) - \phi_{ni}(g)|$.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Familien von reellen, M-integrierbaren Funktionen auf $\mathcal{X}$. Zeigen Sie, dass für $\varepsilon, \delta > 0$

$$N(\varepsilon + \delta, \mathcal{F} + \mathcal{G}, \rho_M) \leq N(\varepsilon, \mathcal{F}, \rho_M) N(\delta, \mathcal{G}, \rho_M),$$

wobei $\mathcal{F} + \mathcal{G} = \{f + g : f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $\kappa^{(N)}(u) := \sum_{j=0}^{N-1} \phi_j(0)\phi_j(u)\mathbb{1}_{[-1,1]}(u)$ der Kern der Ordnung $N \in \mathbb{N}$ aus Aufgabe 6.2. Weiter sei $g_x(y) := \kappa(x-y)$ und $\mathcal{F} := (\{g_x/C(\kappa) : x \in \mathbb{R}\})$, wobei $C(\kappa) \in (0,\infty)$ eine geeignete positive Konstante ist, die nur von κ abhängt. Zeigen Sie, dass für ein beliebiges W-Maß M und für jedes $\varepsilon \in (0,1]$ gilt

$$\log N(2\varepsilon, \mathcal{F}, \rho_M) \leq 4(\log(e/\varepsilon) + \log\log(e/\varepsilon) + 3).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass κ von beschränkter Variation ist und somit eine Zerlegung in monotone Anteile erlaubt. Verwenden Sie dann die verallgemeinerten Inversen der monotonen Anteile.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Situation von Aufgabe 7.4, also $X_1 \ldots, X_n$, i.i.d. mit Dichte $f \in C^m(\mathbb{R})$, und verwenden Sie den Kern $K(x,y) = \kappa(x-y)$ aus obiger Aufgabe 8.2. Somit erhalten wir den Schätzer $\hat{f}_n^{(h)}(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^n \kappa\left(\frac{x-X_i}{h}\right)$. Zeigen Sie, dass für geeignete Wahl von h_n gilt

$$\mathbb{E}\left\|\hat{f}_n^{(h_n)} - f\right\|_\infty \leq C\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{m}{2m+1}},$$

wobei die Konstante $C \in (0,\infty)$ nur von $\|f\|_\infty$, $\|f^{(m)}\|_\infty$, m und κ abhängt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{F}$ eine endliche Familie von beschränkten, messbaren und quadratisch P-integrierbaren Funktionen mit $\#\mathcal{F}$ Elementen. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}\|\mathbb{G}_n\|_{\mathcal{F}} \lesssim \max_{f\in\mathcal{F}} \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{n}} \log(1+\#\mathcal{F}) + \max_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{L_2(P)}\sqrt{\log(1+\#\mathcal{F})}.$$

Hier bedeutet $\lesssim$, dass eine multiplikative numerische Konstante aus der oberen Schranke entfernt wurde.

Hinweis: Zerlegen Sie den Integranden in $A_f = \mathbb{G}_n f \mathbb{1}_{\{|\mathbb{G}_n f| > b/a\}}$ und $B_f = \mathbb{G}_n f \mathbb{1}_{\{|\mathbb{G}_n f| \leq b/a\}}$ und schätzen Sie zunächst die Ausdrücke $\psi_1\left(\mathbb{E}\max_f |A_f|/a\right)$ und $\psi_2\left(\mathbb{E}\max_f |B_f|/\sqrt{b}\right)$ nach oben ab, wobei $\psi_p(x) = \exp(x^p) - 1$ und a, b geeignet gewählt sind. Verwenden Sie die Bernstein-Ungleichung

$$P(|\mathbb{G}_n f| > x) \leq 2\exp\left(-\frac{1}{4}\frac{x^2}{Pf^2 + x\|f\|_\infty/\sqrt{n}}\right), \qquad x > 0.$$

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2017-18/vorlesung-mathematische-statistik-ws-2017-18`