Übungen zur Vorlesung "Mathematische Statistik"

Blatt 7

Abgabetermin: Montag, 04.12.2017, bis 14:00 Uhr im Briefkasten im UG Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Die Idee der Multiskalenanalyse ist die folgende. Wir möchten ein Signal $f \in L_2(\mathbb{R})$ mit einer vorgegebenen 'Auflösung' $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ approximieren. Diese Approximation entspricht der Orthogonalprojektion von f auf V_j, also $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \phi_{jk}, f\rangle \phi_{jk}$, wobei $\phi_{jk}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k)$. Je größer j, desto besser (hochauflösender) ist die Approximation von f. Besitzt ϕ kompakten Träger, so sind die Koeffizienten $c_{jk} = \langle \phi_{jk}, f\rangle$ dieser Projektion lokalisiert in dem Sinne, dass c_{jk} nur lokale Information von f enthält. Zum Beispiel hängt für $\phi = \mathbb{1}_{(0,1]}$ der Koeffizient c_{jk} nur vom Verhalten von f auf dem Intervall $(2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$ ab. Dies hat den Vorteil, dass Signale f die lokal wenig Information tragen, also in gewissen Bereichen annähernd gleich Null sind, durch eine geringere Anzahl von Koeffizienten rekonstruiert werden können, da die zu diesen Bereichen gehörenden Koeffizienten ebenfalls verschwinden. Einen ähnlichen Effekt möchten wir jetzt auch für unterschiedliche Auflösungen oder Skalierungen des Signals erreichen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei ϕ die Skalierungsfunktion einer Multiskalenanalyse $V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots$ von L_2. Für $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sei $W_l := V_{l+1} \ominus V_l$ das orthogonale Komplement von V_l in V_{l+1}. Zeigen Sie, dass

$$V_0 \oplus \left(\bigoplus_{l=0}^{\infty} W_l \right) = L_2.$$

Wie ist die obige unendliche direkte Summe zu verstehen?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten Sie die Situation von Aufgabe 1 mit $\phi = \mathbb{1}_{(0,1]}$. Finden Sie eine Funktion $\psi \in L_2$, so dass für $\psi_{jk}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ die Menge $\{\psi_{jk} : k \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthonormalsystem ist und

$$\overline{\mathrm{span}(\psi_{jk} : k \in \mathbb{Z})} = W_j.$$

Mit der Konvention $\psi_{(-1)k} := \phi_{0k}$ erhalten wir also die bekannte Haar-Basis des L_2, $\{\psi_{jk} : j \geq -1, k \in \mathbb{Z}\}$. Die ψ_{jk} mit den obigen Eigenschaften heißen auch Wavelets und die Funktion ψ wird Mutter-Wavelet genannt. Gibt es zu jeder Skalierungsfunktion ϕ einer Multiskalenanalyse auch ein geeignetes Mutter-Wavelet ψ?

(bitte wenden)

Man kann zeigen, dass es für jedes $N \in \mathbb{N}$ eine Skalierungsfunktion $\phi_{(N)}$ einer Multiskalenanalyse von L_2 gibt, deren Träger im Intervall $[0, 2N-1]$ enthalten ist und so, dass der Kern $K(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi_{(N)}(x-k)\phi_{(N)}(y-k)$ die Voraussetzungen von Satz 0.2 aus Aufgabe 6.1 erfüllt. Ein Beispiel für eine orthogonale Wavelet-Basis die aus einer solchen Skalierungsfunktion gewonnen wird sind die sogenannten Daubechies-Wavelets, nach Ingrid Daubechies. Leider ist die Daubechies-Skalierungsfunktion nicht in geschlossener Form darstellbar.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Der sogenannte Cascade-Algorithmus erlaubt eine effiziente Implementierung einer beliebigen Skalierungsfunktion ausgehend von den Koeffizienten $h_k = \langle \phi, \phi_{1k} \rangle$, mittels der Darstellung $\phi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \phi_{1k}$. Ist der Träger von ϕ hinreichend beschränkt (wie im Fall von Daubechies-Wavelets), so sind die meisten dieser Koeffizienten gleich 0. Die Koeffizienten für die Daubechies-Skalierungsfunktionen unterschiedlicher Ordnung ($N = 1, \ldots, 10$) finden Sie zum Beispiel hier: `https://de.wikipedia.org/wiki/Daubechies-Wavelets#Orthogonale_Wavelets_2`. Der Cascade-Algorithmus verfährt nun, ausgehend von einer beliebigen Anfangsfunktion $\phi^{(0)}$, entlang der Rekursionsgleichung

$$\phi^{(k+1)}(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \phi^{(k)}(2t-k), \quad t \in [0, 2N-1].$$

Überzeugen Sie sich von der Gültigkeit der Darstellung $\phi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h_k \phi_{1k}$. Implementieren Sie den Cascade-Algorithmus für die (approximative) Berechnung der Daubechies-Skalierungsfunktion und visualisieren Sie diese Skalierungsfunktionen für ein paar verschiedene Ordnungen von N.

Hinweis: Werten Sie die Approximation der Skalierungsfunktion $\phi^{(k)}$ im k-ten Schritt nur an dyadischen Punkten $j2^{-k}$, $j = 0, \ldots, 2^k(2N-1)$ aus und fassen Sie die obige Rekursion als Matrix-Gleichung $\phi^{(k+1)} = \Phi^{(k)}h$, $h = (h_0, \ldots, h_{2N-1})' \in \mathbb{R}^{2N}$, für eine geeignete Matrix $\Phi^{(k)}$, auf. Verwenden Sie z.B. $\phi^{(0)} = \mathbb{1}_{(0,1]}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben seien i.i.d. Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ mit Dichte $f \in C^m(\mathbb{R})$, für ein $m \in \mathbb{N}$. Weiter sei $K(x,y)$ ein Kern der die Voraussetzungen von Satz 0.2 aus Aufgabe 6.1 für ein $N \geq m$ erfüllt. Betrachten Sie den Schätzer $\hat{f}_n^{(h)}(y) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K(y/h, X_i/h)$ und schätzen Sie das L_∞-Risiko $\mathbb{E}_f[\|\hat{f}_n^{(h)} - f\|_\infty]$ durch die Summe von stochastischem und deterministischem Anteil ab. Schätzen Sie den deterministischen Anteil weiter ab durch einen Ausdruck der polynomiell vom Bandbreitenparameter h abhängt. Überlegen Sie, welche Methoden für die weitere Abschätzung des stochastischen Anteils hilfreich sein könnten. Auf dem folgenden Übungszettel werden wir die dafür nötigen Techniken im Detail diskutieren.