Übungen zur Vorlesung "Mathematische Statistik"

Blatt 6

Abgabetermin: Montag, 27.11.2017, bis 14:00 Uhr im Briefkasten im UG Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Der Sobolev-Raum von schwach differenzierbaren Funktionen auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$H_p^m(I) := \left\{ f \in L_p(I) : D^j f \in L_p(I) \; \forall j = 1, \ldots, m : \|f\|_{H_p^m(I)} := \|f\|_p + \|D^m f\|_p < \infty \right\}.$$

Weiter bezeichnen wir den Raum der gleichmäßig (uniform) stetigen Funktionen auf I mit $C_u(I)$ und definieren

$$C^m(I) := \left\{ f \in C_u(I) : f^{(j)} \in C_u(I) \; \forall j = 1, \ldots, m : \|f\|_{C^m(I)} := \|f\|_\infty + \|f^{(m)}\|_\infty < \infty \right\}.$$

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen Sie den folgenden Satz.

Satz 0.2. *Sei $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar und $N \in \mathbb{N}$, so dass die folgenden Annahmen erfüllt sind.*

- $c_N(K) := \int_{\mathbb{R}} \sup_{v \in \mathbb{R}} |K(v, v-u)| |u|^N \, du < \infty.$
- *Für jedes $v \in \mathbb{R}$ und $k = 1, \ldots, N-1$, gilt*

$$\int_{\mathbb{R}} K(v, v+u) \, du = 1 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} K(v, v+u) u^k \, du = 0.$$

Für $m \leq N$, setze $c(m, K) = c_m(K) \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(m-1)!} \, dt$ und $K_h(f)(x) = \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} K\left(\frac{x}{h}, \frac{y}{h}\right) f(y) \, dy$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

a) Falls $1 \leq p < \infty$ und $f \in H_p^m(\mathbb{R})$, dann gilt

$$\|K_h(f) - f\|_p \leq c(m, K) \|D^m f\|_p h^m.$$

b) Falls $f \in C^m(\mathbb{R})$, dann gilt

$$\|K_h(f) - f\|_\infty \leq c(m, K) \|f^{(m)}\|_\infty h^m.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass es für jedes $N \in \mathbb{N}$ eine beschränkte messbare Funktion $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Träger in $[-1, 1]$ gibt, so dass $\int_{\mathbb{R}} K(u)\, du = 1$ und $\int_{\mathbb{R}} K(u) u^k\, du = 0$, für jedes $k = 1, \ldots, N-1$.

Hinweis: Verwenden Sie Legendre-Polynome

$$\phi_0(x) := 2^{-1/2}, \quad \phi_m(x) := \sqrt{\frac{2m+1}{2}} \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m}[(x^2-1)^m],$$

$x \in [-1, 1]$, $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $K(x, y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(x-k)\phi(y-k)$ der Haar-Kern aus Aufgabe 3 von Übungsblatt 5. Für welche $N \in \mathbb{N}$ erfüllt dieser Kern die Annahmen von Satz 0.2 aus der obigen Aufgabe 1?

Definition. Eine Funktion $\phi \in L_2(\mathbb{R})$ wird Skalierungsfunktion (scaling function) einer Multiskalenanalyse (multiresolution analysis) von $L_2(\mathbb{R})$ genannt, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) Die Menge $\{\phi_k : k \in \mathbb{Z}\}$, mit $\phi_k(x) = \phi(x-k)$, ist ein Orthonormalsystem in $L_2(\mathbb{R})$.

b) Die linearen Teilräume

$$\begin{aligned} V_0 &:= \left\{ \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \phi_k : c_k \in \mathbb{R}, \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^2 < \infty \right\}, \\ V_j &:= \left\{ f\left(2^j(\cdot)\right) : f \in V_0 \right\}, \quad j \geq 1, \end{aligned}$$

sind geschachtelt, so dass $V_{j-1} \subseteq V_j$ für jedes $j \in \mathbb{N}$.

c) Die Vereinigung $\bigcup_{j\geq 0} V_j$ ist dicht in $L_2(\mathbb{R})$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion $\phi = \mathbb{1}_{(0,1]}$ die Skalierungsfunktion einer Multiskalenanalyse von $L_2(\mathbb{R})$ ist.