Übungen zur Vorlesung "Mathematische Statistik"

Blatt 5

Abgabetermin: Montag, 20.11.2017, bis 14:00 Uhr im Briefkasten im UG Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Für $1 \leq p < \infty$ sei $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\mathbb{R}, \lambda)$ die Menge aller reellwertiger messbarer Funktionen f auf $\mathbb{R}$ mit

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty,$$

wobei $dx = d\lambda(x)$. Weiter sei L_p der zugehörige Banach-Raum von Äquivalenzklassen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Für $1 \leq p < \infty$ und $r \in \mathbb{R}$, betrachten Sie den Translationsoperator $T_r : \mathcal{L}_p \to \mathcal{L}_p$, $T_r(f)(x) = f(x - r)$. Zeigen Sie, dass für alle $f \in \mathcal{L}_p$ gilt $\|T_r(f) - f\|_p \xrightarrow[r \to 0]{} 0$.

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für eine geeignete Teilmenge von $\mathcal{L}_p$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beweisen Sie den folgenden Satz.

Satz 0.1. *Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar, so dass*

$$\int_{\mathbb{R}} \sup_{z \in \mathbb{R}} |K(z, z - u)| \, du < \infty$$

und $\int_{\mathbb{R}} K(x, y) \, dy = 1$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Aussagen für $K_h(f)(x) = \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} K\left(\frac{x}{h}, \frac{y}{h}\right) f(y) \, dy$.

a) Ist f beschränkt und stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$, so konvergiert $K_h(f)(x_0)$ gegen $f(x_0)$ für $h \to 0$.

b) Ist f beschränkt und gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$, dann gilt $\|K_h(f) - f\|_\infty \to 0$ für $h \to 0$.

c) Ist $f \in \mathcal{L}_p$ für ein $p \in [1, \infty)$, dann gilt $\|K_h(f) - f\|_p \to 0$ für $h \to 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$, sei $\phi_{jk}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k)$, wobei $\phi = \mathbb{1}_{(0,1]}$, und $V = \overline{\operatorname{span}(\Phi_j)}$ sei der Abschluss der linearen Hülle der Menge $\Phi_j = \{\phi_{jk} : k \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, dass für festes j die Menge Φ_j ein Orthonormalsystem in L_2 ist. Zeigen Sie weiter, dass $K(x, y) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(x - k)\phi(y - k)$ die Annahmen von Satz 0.1 erfüllt und für $h = 2^{-j}$ der Operator $K_h(f)(x) = \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} K\left(\frac{x}{h}, \frac{y}{h}\right) f(y) \, dy$, $K_h : L_2 \to V$ die Orthogonalprojektion auf den linearen Teilraum $V \subseteq L_2$ ist. Unter welchen Annahmen an $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt auch $K(x, y) = k(x - y)$ die Annahmen von Satz 0.1 aus Aufgabe 2?

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei f eine Funktion auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, mit m schwachen Ableitungen $D^j f$, $j = 1, \ldots, m$ und $x \in I$. Zeigen Sie, dass man f auf einer Nullmenge abändern kann, so dass die folgenden Aussagen gelten.

a) Ist $m = 1$, $Df \in \mathcal{L}_1(I)$ und $y \geq x$, $y \in I$, so gilt

$$f(y) - f(x) = \int_x^y Df(t)\, dt.$$

Insbesondere ist f also stetig auf I.

b) Für $m \geq 1$ gilt die Taylor-Formel

$$f(y) = f(x) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{D^k f(x)}{k!}(y-x)^k + (y-x)^m \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}}{(m-1)!} D^m f(x + t(y-x))\, dt.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Fundamentalsatz der (Lebesgue-)Analysis:

Satz. *Ist f eine reellwertige Funktion auf dem kompakten Intervall $[a,b]$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

a) f ist absolut stetig.

b) f ist fast überall differenzierbar mit Ableitung $f' \in \mathcal{L}_1([a,b])$ und

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt \quad \forall x \in [a,b].$$

c) Es existiert eine Funktion $g \in \mathcal{L}_1([a,b])$, so dass

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\, dt \quad \forall x \in [a,b].$$