Übungen zur Vorlesung "Mathematische Statistik"

Blatt 3

Abgabetermin: Montag, 06.11.2017, bis Montag 14:00 Uhr im Briefkasten im UG Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^p$ offen, $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : V \times S \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Außerdem sei $s \mapsto f(v,s)$ μ-integrierbar, für jedes $v \in V$, die partielle Ableitung $\frac{\partial f(v,s)}{\partial v}$ existiere und $v \mapsto \frac{\partial f(v,s)}{\partial v} \in \mathbb{R}^p$ sei stetig auf V, für jedes $s \in S$. Weiter gibt es eine μ-integrierbare Funktion $g : S \to \mathbb{R}$, so dass $\|\frac{\partial f(v,s)}{\partial v}\| \leq g(s)$, für alle $(v,s) \in V \times S$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\phi : v \mapsto \int_S f(v,s)\, d\mu(s)$ von V nach $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit Ableitung $\frac{\partial \phi(v)}{\partial v} = \int_S \frac{\partial f(v,s)}{\partial v}\, d\mu(s)$.

Hinweis: Mittelwertsatz und Satz der dominierten Konvergenz.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zufallsvariablen die in Verteilung gegen eine Standardnormalverteilung konvergiert, also $Z_n \rightsquigarrow Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Weiter seien a_n und $b_n > 0$ reelle Zahlenfolgen, so dass $Y_n := \frac{Z_n - a_n}{b_n} \rightsquigarrow Y$. Zeigen Sie, dass dann $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ gilt, für geeignete Parameter μ und σ^2.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $\mathcal{N}(\theta, 1)$-verteilt, wobei $\theta \in \Theta = [0, \infty)$. Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_n$ für θ unter dem wahren Parameter $\theta_0 = 0$ nicht asymptotisch normalverteilt ist, es also keine Folgen a_n und $b_n > 0$ gibt, so dass $\frac{\hat{\theta}_n - a_n}{b_n}$ in Verteilung gegen eine Normalverteilung konvergiert. Welche Voraussetzung des Satzes zur asymptotischen Normalität des ML-Schätzers ist verletzt?

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. gleichverteilt auf $[0, \theta]$ mit $\theta \in \Theta = (0, \infty)$. Zeigen Sie, dass der ML-Schätzer für θ nicht asymptotisch normalverteilt ist. Können Sie seine asymptotische Verteilung ermitteln? Dazu müssen Sie geeignete Folgen a_n und $b_n > 0$ finden, so dass $\frac{\hat{\theta}_n - a_n}{b_n}$ gegen eine nicht-degenerierte Grenzverteilung konvergiert.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2 und $\max_i X_i \leq t \iff \forall i : X_i \leq t$.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2017-18/vorlesung-mathematische-statistik-ws-2017-18`