Übungen zur Vorlesung
"Mathematische Statistik"

Blatt 2

Abgabetermin: Montag, 30.10.2017, bis Montag 14:00 Uhr im Briefkasten im UG Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen Sie das folgende Lemma (Proposition 2.5 aus der Vorlesung):

Lemma 0.1. *Es sei* $(T, \mathcal{T})$ *ein messbarer Raum und* $\mathcal{H}$ *eine Menge von messbaren Funktionen von* T *nach* $\mathbb{R}$. *Weiter seien* $X, X_1, X_2, \ldots,$ T*-wertige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. *Angenommen für jedes* $\varepsilon > 0$ *existiert eine endliche Anzahl von 'Klammern' ('brackets')*

$$[l_j, u_j] := \{f : T \to \mathbb{R} : l_j(x) \leq f(x) \leq u_j(x), \forall x \in T\}, \qquad j = 1, \ldots, N(\varepsilon),$$

(wobei $l_j = l_j^{(\varepsilon)}$ *und* $u_j = u_j^{(\varepsilon)}$ *von* ε *abhängen können) so, dass* $\mathbb{E}|l_j(X)| < \infty$, $\mathbb{E}|u_j(X)| < \infty$ *und* $\mathbb{E}|u_j(X) - l_j(X)| < \varepsilon$ *für jedes* $j = 1, \ldots, N(\varepsilon)$. *Weiter gelte* $\mathcal{H} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N(\varepsilon)} [l_j, u_j]$. *Dann gilt*

$$\sup_{h \in \mathcal{H}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i) - \mathbb{E}h(X) \right| \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{P}-f.s.} 0.$$

Hinweis: Verwende das starke Gesetz der großen Zahlen um eine $\mathbb{P}$-Null Menge $A \in \mathcal{A}$ zu finden, so dass für jedes $\omega \in \Omega \setminus A$ und jedes $m \in \mathbb{N}$ ein Index $n_0 = n_0(\omega, m)$ existiert, mit

$$\max_{j=1,\ldots,N(\varepsilon_m)} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_j(X_i(\omega)) - \mathbb{E}l_j(X) \right| \leq \varepsilon_m, \quad \text{und}$$
$$\max_{j=1,\ldots,N(\varepsilon_m)} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_j(X_i(\omega)) - \mathbb{E}u_j(X) \right| \leq \varepsilon_m,$$

für alle $n \geq n_0$, wobei $\varepsilon_m = 1/(2m)$. Verwende nun $\max_j \mathbb{E}|u_j(X) - l_j(X)| < \varepsilon_m$ und geeignete obere und untere Schranken an $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i(\omega)) - \mathbb{E}h(X)$.

(bitte wenden)

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\Theta \subseteq \mathbb{R}^p$ kompakt und $M : \Theta \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ stetig.

a) Zeigen Sie, dass $F(y) := \sup_{\theta\in\Theta} M(\theta, y)$, $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, stetig ist.
Hinweis: Beachten Sie, dass für jede kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^d$, die eingeschränkte Abbildung $M : \Theta \times K \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

b) Zeigen Sie, unter Verwendung von Punkt (a), dass $\hat{\theta}(y) := \mathrm{argmax}_{\theta\in\Theta} M(\theta, y)$, $\hat{\theta} : \mathbb{R}^d \to \Theta$ ebenfalls stetig ist, falls der Maximierer $\hat{\theta}(y)$ für jedes $y \in \mathbb{R}^d$ eindeutig ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Finden Sie ein Beispiel für eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger reeller Funktionen auf einer kompakten Menge Θ, die punktweise, jedoch nicht gleichmäßig, gegen eine stetige Funktion f konvergiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$, f_n einen eindeutigen Maximierer $\hat{\theta}_n$ besitzt und auch f einen eindeutigen Maximierer θ_0 besitzt, $\hat{\theta}_n$ aber nicht gegen θ_0 konvergiert.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Betrachten Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer im Lokationsmodell. Gegeben sind also i.i.d. Beobachtungen $X_1, \ldots, X_n$ mit der Lebesguedichte $p_\theta(x) = p(x - \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, für eine geeignete (bekannte) Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dass hier punktweise Konsistenz im Punkt $\theta_0 = 0$ bereits gleichmäßige Konsistenz impliziert, also

$$\forall\varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_0(|\hat{\theta}_n| > \varepsilon) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \sup_{\theta\in\mathbb{R}} \mathbb{P}_\theta(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass der ML-Schätzer im Lokationsmodell *äquivariant* ist, d.h., $\hat{\theta}_n(x_1 + a, \ldots, x_n + a) = a + \hat{\theta}_n(x_1, \ldots, x_n)$, für alle $a, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.