Übungen zur Vorlesung "Mathematische Statistik"

Blatt 14 (Bonus)

Abgabetermin: Dienstag, 6.2.2018, bis 14:00 Uhr im Briefkasten im UG Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Angenommen $\mathbb{P}$ ist konvex und $\omega_H(\varepsilon)/\varepsilon^2 \to 0$ für $\varepsilon \to 0$. Zeigen Sie, dass dann das Funktional $\theta : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{P}$ konstant ist. Zusammen mit Aufgabe 13.2 bedeutet das also, dass $1/n$ die schnellst mögliche Minimax-Schätzrate eines reellen Parameters über einem konvexen Modell $\mathbb{P}$ mit i.i.d. Beobachtungen ist (Mit Ausnahme von trivialen Schätzproblemen in denen der interessierende Parameter bekannt ist). Kennen Sie ein Beispiel für ein Schätzproblem in dem diese Rate erreicht wird?

Hinweis: Betrachten Sie für $P_0, P_1 \in \mathbb{P}$ und $\lambda \in [0,1]$ die Funktion $f(\lambda) = \theta(\lambda P_0 + (1-\lambda)P_1)$ und verwenden Sie, dass $H^2 \leq 2d_{TV}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Finden Sie eine **obere** Schranke an den Hellinger-Stetigkeitsmodul $\omega_H(\varepsilon)$ für das quadratische Funktional $\theta(P) = \int_0^1 p(x)\,dx$ über der Hölder-Klasse $\mathcal{P}(\beta, L)$ auf $[0,1]$. Vergleichen Sie dazu die Resultate der Aufgaben 13.2 und 13.4. Was schließen Sie daraus für die in 13.2 entwickelten Minimax-Schranken für die Schätzung von Funktionalen $\theta : \mathbb{P} \to \mathbb{R}$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für eine reelle Zufallsvariable X die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- $\exists K_1 > 0: \quad P(|X| > t) \leq \exp(1 - t^2/K_1^2) \qquad \forall t \geq 0.$
- $\exists K_2 > 0: \quad \mathbb{E}[\exp(X^2/K_2^2)] \leq e.$

Hinweis: $\mathbb{E}[|X|] = \int_0^\infty P(|X| > t)\,dt.$

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. mit Dichte p auf $[0,1]$ und p ein Element der Hölder-Klasse $\mathcal{P}(\beta, L)$, $\beta, L > 0$. Konstruieren Sie mit Hilfe der Lepski-Methode einen adaptiven Kerndichteschätzer $\hat{p}_{n,\hat{h}_n}$ für p unter L_2-Verlust, mit global gewählter Bandbreite $\hat{h}_n$. Finden Sie also einen Schätzer $\hat{p}_{n,\hat{h}_n}(x)$ für $p(x)$, dessen Bandbreitenparameter $\hat{h}_n$ nicht von x abhängt, und der nur die Information verwendet, dass $\beta \in [\beta_*, \beta^*]$ und $L \in [L_*, L^*]$, nicht jedoch die konkreten Werte von β und L, der aber dennoch (zumindest)

$$\sup_{\substack{\beta\in[\beta_*,\beta^*]\\ L\in[L_*,L^*]}} \sup_{p\in\mathcal{P}(\beta,L)} \mathbb{E}_p \left[\left(\frac{n}{\log n} \right)^{\frac{\beta}{2\beta+1}} \|\hat{p} - p\|_{L_2} \right] \leq c < \infty,$$

erfüllt. Der logarithmische Term lässt sich hier sogar noch entfernen.