

# Übungen zur Vorlesung “Mathematische Statistik“

## Blatt 13

**Abgabetermin:** Montag, 29.1.2018, bis 14:00 Uhr im Briefkasten im UG Eckerstraße 1  
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.  
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Wir setzen unsere Analyse des Minimax-Risikos  $\mathcal{M}_n(\mathbb{P})$  von Übungsblatt 12 fort. Unser Ziel ist es, eine untere Schranke der Ordnung  $l \circ \omega_H(n^{-1/2})$  zu erhalten, wobei für  $\varepsilon \geq 0$ ,

$$\omega_H(\varepsilon) := \sup\{|\theta(P_0) - \theta(P_1)| : H(P_0, P_1) \leq \varepsilon, P_0, P_1 \in \mathbb{P}\},$$

der Stetigkeitsmodul des interessierenden Funktionals  $\theta : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$  bezüglich der Hellinger-Distanz ist. Eine Charakterisierung der Konvergenzrate von  $\mathcal{M}_n(\mathbb{P})$  durch einen Stetigkeitsmodul von  $\theta$  ist einleuchtend, da dieser die lokale Variation von  $\theta$  auf  $\mathbb{P}$ , und somit die ‘Schwere’ des Schätzproblems, beschreibt. Im Kontext von Aufgabe 12.3, definiere man analog zu  $\eta_A^{(n)}(\Delta)$  und  $\Delta_A^{(n)}(\eta)$ , die Größen

$$\eta_2^{(n)}(\Delta) := \sup_{t \in \mathbb{R}} \pi \left( \mathbb{P}_{\leq t}^{(n)}, \mathbb{P}_{\geq t+\Delta}^{(n)} \right)$$

und

$$\Delta_2^{(n)}(\eta) := \sup\{\Delta \geq 0 : \eta_2^{(n)}(\Delta) > \eta\}.$$

### Aufgabe 1

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für  $\eta \in (0, 1)$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt,

$$\Delta_A^{(n)}(\eta) \geq \Delta_2^{(n)}(\eta) \geq \omega_H(g_H(\eta)^-),$$

wobei  $g_H$  wie in Aufgabe 12.4 definiert ist.

### Aufgabe 2

(4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für  $\varepsilon \in (0, 1)$  und  $x \in [0, 1]$ ,  $1 - \varepsilon^x \geq \varepsilon |\log \varepsilon| x$  gilt, und schließen Sie damit, und mit den vorhergehenden Aufgaben, dass für  $\eta \in (0, 1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $\varepsilon := \eta(2 - \eta)$  gilt

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{P}) \geq \frac{\eta}{2} \cdot l \left( \left[ \frac{1}{2} \omega_H \left( \left[ \sqrt{\frac{\varepsilon |\log \varepsilon|}{n}} \right]^- \right) \right]^- \right).$$

**Bemerkung:** Falls  $\mathbb{P}$  konvex ist,  $\theta : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$  linear und beschränkt ist und  $\omega_H(\varepsilon) \asymp \varepsilon^r$ , für  $\varepsilon \rightarrow 0$  und für ein  $r \in (0, 1]$ , so lässt sich zeigen, dass die eben erhaltene untere Schranke auch nicht zu klein ist, es also immer einen Schätzer  $\hat{\theta}_n$  gibt, so dass  $\sup_{P \in \mathbb{P}} \mathbb{E}_P[l(|\hat{\theta}_n - \theta(P)|)] \lesssim l \circ \omega_H(n^{-1/2})$ .

### Aufgabe 3

(4 Punkte)

Betrachten Sie die nicht-parametrischen Regressionsprobleme aus Aufgabe 11.4 und Aufgabe 12.1. Geben Sie jeweils die Menge  $\mathbb{P}$  der datengenerierenden Verteilungen und das interessierende Funktional  $\theta : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$  an. Finden Sie weiter für jedes der beiden Probleme eine “geeignete” untere Schranke an  $\omega_H(\varepsilon)$ , zumindest für alle kleinen  $\varepsilon > 0$ . Sind die hier auftretenden Funktionale  $\theta$  linear?

(bitte wenden)

**Aufgabe 4**

(4 Punkte)

Gegeben seien i.i.d. Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  mit Dichte  $p \in \mathcal{P}(\beta, L)$ ,  $\beta > 0$ ,  $L > 0$ , wobei  $\mathcal{P}(\beta, L)$  die Klasse aller  $\ell := \lfloor \beta \rfloor$  mal differenzierbaren Lebesgue Dichten  $p$  auf  $[0, 1]$  bezeichnet, so dass  $p^{(\ell)}$  Hölder-stetig ist, mit Exponent  $\beta - \ell$  und Konstante  $L$ . Finden Sie mit Hilfe der in der Vorlesung präsentierten ‘fuzzy hypotheses’ eine untere Schranke an das Minimax-Risiko der Schätzung des quadratischen Funktionals  $\theta(p) = \int_0^1 p^2(x) dx$ , welche von der Ordnung

$$\psi_n = \max \left( n^{-\frac{4\beta}{4\beta+1}}, n^{-1/2} \right)$$

ist.