Übungen zur Vorlesung "Mathematische Statistik"

Blatt 10

Abgabetermin: Montag, 8.1.2018, bis 14:00 Uhr im Briefkasten im UG Eckerstraße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Klasse $\mathcal{F} = \{\mathbb{1}_{(-\infty,t]} : t \in \mathbb{R}\}$ für jedes W-Maß P auf $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ eine P-Donsker-Klasse ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei die parametrische Klasse $\mathcal{F} = \{f_\theta : \theta \in \Theta\}$ auf $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, indiziert durch eine beschränkte Teilmenge $\Theta \subseteq \mathbb{R}^d$. Angenommen es existiert eine messbare Funktion $m : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, mit

$$|f_{\theta_1}(x) - f_{\theta_2}(x)| \leq m(x)\|\theta_1 - \theta_2\|, \qquad \forall \theta_1, \theta_2 \in \Theta, \forall x \in \mathcal{X},$$

und $P\,m^2 < \infty$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine P-Donsker-Klasse ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen auf $\mathbb{R}$ mit Dichte $p \in \mathcal{P}(\beta, L)$, und $\beta > 0$, $L > 0$. Zeigen Sie, dass für alle hinreichend großen n,

$$\inf_{\hat{\theta}} \sup_{p \in \mathcal{P}(\beta,L)} \mathbb{E}_p \left[\|\hat{\theta} - p\|_{L_2}^2 \right] \geq c \cdot n^{-\frac{2\beta}{2\beta+1}},$$

für eine Konstante $c > 0$ die nicht von n abhängt.

Hinweis: Erweitern Sie das Beispiel 4.23 aus der Vorlesung zu $M + 1$ Hypothesen der Form

$$p_{\omega,n}(y) = p(y) + \frac{L}{2} h_n^\beta \sum_{k=1}^m \omega_k \left[\kappa\left(\frac{y - x_k}{h_n}\right) - \kappa\left(\frac{y - x_k}{h_n} + 1\right) \right],$$

wobei $m = m_n \to \infty$ für $n \to \infty$ geeignet gewählt ist, $x_k = \frac{2k+1/2}{m}$ und $\omega \in \Omega = \{0,1\}^m$, und verwenden Sie das folgende Resultat.

Satz 0.1 (Varshamov-Gilbert). *Es sei $m \geq 8$. Mit $\rho(\omega, \omega') = \sum_{k=1}^m \mathbb{1}_{\omega_k \neq \omega'_k}$, $\omega, \omega' \in \Omega$, bezeichne man die* Hamming-Distanz *zwischen ω und ω'. Dann gibt es eine Teilmenge $\{\omega^{(0)}, \ldots, \omega^{(M)}\}$ von Ω, so dass $M \geq 2^{m/8}$, $\omega^{(0)} = (0, \ldots, 0)$, und*

$$\rho(\omega^{(j)}, \omega^{(k)}) \geq \frac{m}{8}, \quad \forall\, 0 \leq j < k \leq M.$$

(vgl. A. Tsybakov: "Introduction to Nonparametric Estimation", Kapitel 2.6.1)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $p_{e,1} = \inf_\psi \max\{P_0(\psi \neq 0), P_1(\psi \neq 1)\}$ wie in der Vorlesung definiert und $\mathcal{X}$ enthalte zumindest zwei unterschiedliche Elemente. Finden Sie für jedes $\lambda \in [0,1]$ zwei W-Maße P_0 und P_1 auf $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$, so dass $p_{e,1} = \lambda = 1 - d_{TV}(P_0, P_1)$.