1 Network Vector Autoregression

Wir betrachten ein Netzwerk mit N Knoten und bekannter Adjazenzmatrix $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, i \neq j \text{ und Knoten } i \text{ ist mit Knoten } j \text{ verbunden} \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$$

NAR - Modell:

$$Y_{it} = \beta_0 + Z_i'\gamma + \beta_1 n_i^{-1} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} Y_{j(t-1)} + \beta_2 Y_{i(t-1)} + \varepsilon_{it}$$

$n_i := \sum_{i \neq j} a_{ij}$	Anzahl der mit i verbunden Knoten
$\beta_0 + Z_i'\gamma$	'nodal impact', γ 'nodal effect', Z_i Kontenspezifische Zufallsvariable
β_1	'network effect'
β_2	'momentum effect'
$\varepsilon_{it} \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$	'Noise', unabhängig von Z_i

in Vektorschreibweise:

$$\mathbb{Y}_t = \mathcal{B}_0 + G\mathbb{Y}_{t-1} + \mathcal{E}_t \tag{1}$$

$$\mathcal{B}_0 := \beta_0 \mathbb{1} + \mathbb{Z}\gamma, \quad G := \beta_1 W + \beta_2 I \quad \text{und} \quad W := diag(n_1^{-1}, \ldots, n_N^{-1})A$$

2 Strikt stationärer Typ I (N fest)

Satz 1. *Sei $\mathbb{E}\|Z_i\| < \infty$, $|\beta_1| + |\beta_2| < 1$ und N sei fest, dann hat (1) eine eindeutig bestimmte Stationäre Lösung mit endlichem ersten Moment der Form:*

$$\mathbb{Y}_t = (I - G)^{-1}\mathcal{B}_0 + \sum_{j=0}^{\infty} G^j \mathcal{E}_{t-j} \tag{2}$$

3 Strikt stationärer Typ II ($N \to \infty$)

Definition 1. *Sei $\{\mathbb{Y}_t \in \mathbb{R}^N\}$ eine N-dimensionale Zeitreihe mit $N \to \infty$ und $\mathcal{W} := \{\omega \in \mathbb{R}^\infty : \sum |\omega_i| < \infty\}$. Sei $w_N := (\omega_1, \ldots, \omega_N)$, dann heißt $\{\mathbb{Y}_t\}$ **strikt stationär**, falls für alle $\omega \in \mathcal{W}$ gilt*

- $Y_t^\omega := \lim_{N \to \infty} w_N \mathbb{Y}_t$ *existiert und*
- $\{Y_t^\omega\}$ *ist strikt stationär.*

*$\{\mathbb{Y}_t\}$ hat einen **endlichen Moment m-ter Ordnung**, falls $\max_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{E}|Y_{it}^m| < \infty$.*

Satz 2. *Sei $\mathbb{E}\|Z_i\| < \infty$, $|\beta_1| + |\beta_2| < 1$ und $N \to \infty$, dann hat (1) eine eindeutig bestimmte Stationäre Lösung mit endlichem ersten Moment der Form:*

$$\mathbb{Y}_t = (I - G)^{-1}\mathcal{B}_0 + \sum_{j=0}^{\infty} G^j \mathcal{E}_{t-j} \tag{2}$$

4 Kleinster Quadrate Schätzer (LSE)

Sei $\beta := (\beta_0, \beta_1, \beta_2)'$, $\theta := (\beta', \gamma')$. Unser Ziel ist es θ zu schätzen, dazu schreiben wir (1) um:

$$\mathbb{Y}_t = \mathbb{X}_{t-1}\theta + \mathcal{E}_t$$

mit $X_{i(t-1)} := (1, w_i'\mathbb{Y}_{t-1}, Y_{i(t-1)}, Z_i')$ und $w_i = (n_i^{-1}a_{ij} : 1 \leq j \leq N)$ i-te Zeile von W. Unser LSE ist somit:

$$\hat{\theta} := \left(\sum_{t=1}^{T} \mathbb{X}_{t-1}'\mathbb{X}_{t-1}\right)^{-1} \sum_{t=1}^{T} \mathbb{X}_{t-1}'\mathbb{Y}_t \tag{3}$$

Um die Konsistenz von (3) nachzuweisen benötigen wir die folgenden technischen Annahmen.

C1('Nodal Assumptions'):

-Z_i i.i.d. mit $\mathbb{E}Z_i = 0$, $\Sigma_Z := Cov(Z)$

-$\varepsilon_{it} \overset{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

-Z_i, ε sind unabhängig und haben einen endlichen vierten Moment

C2(Netzwerkstruktur):
Sei W eine nicht stochastische Folge (indiziert mit N) von Matrizen.

C2.1 ('Connectivity')
W ist eine Übergangsmatrix einer Markovkette mit Zustandsraum $\{1, \ldots, N\}$. Die Markovkette ist irreduzibel und aperiodisch. π bezeichne die stationäreVerteilung der Markovkette mit

$$\pi_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$$

$$\pi = W'\pi \text{ und } \sum_{i=1}^{N} \pi^2 \overset{N\to\infty}{\to} 0$$

C2.2 (Gleichmäßigkeit)
Setze $W^* := W + W'$, wir nehmen an, dass $\lambda_{max}(W^*) = \mathcal{O}(log(N))$

C3 (Gesetz der großen Zahlen)

Setze $Q := (I - G)^{-1}(I - G')^{-1}$, wir nehmen an folgende Grenzwerte existieren

$$\kappa_1 := \lim_{N\to\infty} N^{-1}tr(\Gamma(0)),\ \kappa_2 := \lim_{N\to\infty} N^{-1}tr(W\Gamma(0)),$$

$$\kappa_3 := \lim_{N\to\infty} N^{-1}tr((I - G)^{-1}) \text{ und } \kappa_4 := \lim_{N\to\infty} N^{-1}tr(Q).$$

Bemerkung 1. *Aus C3 folgt die Existenz folgender Grenzwerte*

$$\kappa_5 := \lim_{N\to\infty} N^{-1}tr(WQW'),\ \kappa_6 := \lim_{N\to\infty} N^{-1}tr(W\Gamma(0)W'),$$

$$\kappa_7 := \lim_{N\to\infty} N^{-1}tr(WQ) \text{ und } \kappa_8 := \lim_{N\to\infty} N^{-1}tr(W(I - G)^{-1}).$$

Satz 3. *Sei $|\beta_1| + |\beta_2| < 1$ und gelte C1-C3, dann gilt*

$$\sqrt{NT}(\hat{\theta} - \theta) \overset{\mathcal{D}}{\to} \mathcal{N}(0, \sigma^2\Sigma^{-1})$$