Hawkes Prozesse Grundlagen

Im Folgenden sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis. Das heißt $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ist eine rechtsstetige Filtration mit $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ für alle $t \geq 0$ und $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definition (Punktprozess)**.** Ein adaptierter càdlàg Prozess N mit $N_0 = 0$, $N_t \in \mathbb{N}$ für alle $t \geq 0$ und $\Delta N_t \in \{0, 1\}$ für alle $t \geq 0$ heißt Punktprozess. Hierbei sei mit $\Delta N := N - N_-$ der Sprungprozess von N bezeichnet.

Definition. (Previsible & Optionale σ-Algebra)

(i) Wir definieren die optionale σ-Algebra $\mathscr{O}$ über $\Omega \times \mathbb{R}_+$ durch

$$\mathscr{O} := \sigma\big(X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \mid X \text{ ist adaptiert und càdlàg}\big).$$

(ii) Wir definieren die previsible σ-Algebra $\mathscr{P}$ über $\Omega \times \mathbb{R}_+$ durch

$$\mathscr{P} := \sigma\big(X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \mid X \text{ ist adaptiert und linksstetig}\big).$$

Bemerkung. Man kann zeigen, dass jeder optionale Prozess X messbar bzgl. $\mathcal{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ ist. Weiter ist jeder previsible Prozess X auch optional (und somit auch messbar).

Korollar. *Es gilt* $\mathscr{P} = \sigma\big(\{A \times \{0\} : A \in \mathcal{F}_0\} \cup \{A \times (s, t] : s < t \text{ und } A \in \mathcal{F}_s\}\big)$.

Definition.

(i) Wir bezeichnen mit $\mathscr{M}$ die Menge aller gleichgradig integrierbaren Martingale.

(ii) Wir bezeichnen mit $\mathscr{V}$ die Menge aller adaptierten càdlàg Prozesse A mit $A_0 = 0$, sodass jeder Pfad von lokal beschränkter Variation ist.

(iii) Wir bezeichnen mit $\mathscr{V}^+$ die Menge aller $A \in \mathscr{V}$ mit monoton wachsenden Pfaden.

(iv) Definiere $\mathscr{A} := \{A \in \mathscr{V} \mid \mathbb{E}[\mathrm{Var}(A)_\infty] < \infty\}$.

(v) Definiere $\mathscr{A}^+ := \{A \in \mathscr{V}^+ \mid \mathbb{E}[\mathrm{Var}(A)_\infty] < \infty\}$.

Satz (Previsibler Kompensator)**.** *Es sei* $A \in \mathscr{A}^+_{loc}$. *Dann existiert ein bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutiger previsibler Prozess* $A^p \in \mathscr{A}^+_{loc}$, *sodass*

$$A - A^p \in \mathscr{M}_{loc}.$$

Korollar. *Jeder Punktprozess N ist lokal beschränkt. Insbesondere ist* $N \in \mathscr{A}^+_{loc}$.

Bemerkung. Wir finden also zu jedem Punktprozess N einen previsiblen Prozess $N^p \in \mathscr{A}^+_{loc}$, sodass

$$N - N^p \in \mathscr{M}_{loc}.$$

Dieser wird auch als Intensität bezeichnet.

Zufällige Maße

Es sei (E, τ) ein polnischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathscr{E}$. Wir bezeichnen mit $\tilde{\Omega}$ die Menge $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times E$, mit $\tilde{\mathscr{O}}$ die σ-Algebra $\mathscr{O} \otimes \mathscr{E}$ und mit $\tilde{\mathscr{P}}$ die σ-Algebra $\mathscr{P} \otimes \mathscr{E}$.

Definition (Zufällige Maße).
Ein zufälliges Maß auf $\mathbb{R}_+ \times E$ ist eine Familie $\mu = \{\mu(w; dt, dx) | \omega \in \Omega\}$ von nichtnegativen Maßen auf $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{E})$ mit der Eigenschaft

$$\mu(w; \{0\} \times E) = 0 \qquad \text{für alle } \omega \in \Omega.$$

Zusätzlich fordern wir, dass die Abbildung $\omega \mapsto \mu(\omega, A)$ messbar bezüglich $\mathcal{F}$ ist für alle $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{E}$.

Definition (Integration bezüglich zufälliger Maße).
Es sei W eine $\tilde{\mathscr{O}}$-messbare, reellwertige Abbildung auf $\tilde{\Omega}$. Es folgt, dass die Abbildung $(t, x) \mapsto W(\omega, t, x)$ messbar ist für alle $\omega \in \Omega$. Weiter definieren wir den Integralprozess $W * \mu$ durch

$$W * \mu_t(\omega) := \int\limits_{[0,t] \times E} W(\omega, s, x) \mu(\omega, \mathrm{d}s, \mathrm{d}x), \text{ falls } \int_{[0,t] \times E} |W(\omega, s, x)| \mu(\omega, \mathrm{d}s, \mathrm{d}x) < \infty$$

und $W * \mu_t(\omega) := \infty$ sonst.

Definition (Optionale zufällige Maße).

(i) Ein zufälliges Maß μ heißt optional (previsibel), falls der Prozess $W * \mu$ optional (previsibel) für jede optionale (previsible) Abbildung W ist.

(ii) Ein optionales zufälliges Maß heißt integrierbar, falls $1 * \mu \in \mathscr{A}^+$

(iii) Ein optionales zufälliges Maß heißt $\tilde{\mathscr{P}}$-σ-endlich, falls eine strikt positive previsible Abbildung V auf $\tilde{\Omega}$ existiert, sodass $V * \mu \in \mathscr{A}^+$; Dies ist äquivalent dazu, dass eine Partition $A_n \in \tilde{\mathscr{P}}$ von $\tilde{\Omega}$ existiert, sodass $\mathbb{1}_{A_n} * \mu \in \mathscr{A}^+$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition ($\mathbb{N}$-wertige zufällige Maße).
Ein $\mathbb{N}$-wertiges zufälliges Maß μ ist ein zufälliges Maß mit folgenden Eigenschaften:

- $\mu(\omega, \{t\} \times E) \leq 1$.
- Für $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{E}$ ist $\mu(\cdot, A)$ eine $\overline{\mathbb{N}}$-wertige Abbildung.
- μ ist optional und $\tilde{\mathscr{P}}$-σ-endlich.

Definition (Erweiterte Poissonmaße).

(i) Ein erweitertes Poissonmaß auf $\mathbb{R}_+ \times E$ bezüglich einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ist ein $\mathbb{N}$-wertiges zufälliges Maß μ, sodass gilt:

  - Das positive Maß m auf $\mathbb{R}_+ \times E$, mit $m(A) := \mathbb{E}[\mu(A)]$, ist σ-endlich.
  - Für jedes $s \in \mathbb{R}_+$ und jedes $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{E}$, sodass $A \subset (s, \infty) \times E$ und $m(A) < \infty$, ist die Zufallsvariable $\mu(\cdot, A)$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$.

(ii) Das Maß m heißt Intensität von μ.

(iii) Falls $m(\{t\} \times E) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$, so heißt μ Poissonmaß. Gilt zusätzlich $m(\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) = \mathrm{d}t \times F(\mathrm{d}x)$, wobei F ein positives σ-endliches Maß auf $(E, \mathscr{E})$ ist, so heißt μ homogenes Poissonmaß.

Hawkes Prozesse

Es sei im Folgenden nun $\mathcal{G} = (\mathcal{S}, \mathcal{E})$ ein abzählbarer Graph mit Knoten $i \in \mathcal{S}$ und orientierten Kanten $e \in \mathcal{E}$. Schreibe $e = (j, i) \in \mathcal{E}$ für eine orientierte Kante von dem Knoten j zu dem Knoten i. Weiter seien mit $\varphi = (\varphi_{ji})_{(j,i)\in\mathcal{E}}$, wobei $\varphi_{ji} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, und mit $(h_i)_{i\in\mathcal{S}}$, wobei $h_i : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, eine zu den Kanten, bzw. zu den Knoten assoziierte Familie von Funktionen gegeben.

Definition 1 (Hawkes-Prozess)**.** Ein Hawkes-Prozess mit Parametern $(\mathcal{G}, \varphi, h)$ ist eine Familie von Zählprozessen $(Z_t^i)_{t\geq 0, i\in\mathcal{S}}$, sodass:

(i) Für alle $i, j \in \mathcal{S}$ mit $i \neq j$ gilt: $(Z_t^i)_{t\geq 0}$ und $(Z_t^j)_{t\geq 0}$ springen fast sicher nie gleichzeitig.

(ii) Für alle $i \in \mathcal{S}$ gilt: Der Kompensator $(\Lambda_t^i)_{t\geq 0}$ von $(Z_t^i)_{t\geq 0}$ hat die Form $\Lambda_t^i = \int\limits_0^t \lambda_s^i \, \mathrm{d}s$, wobei der Prozess $(\lambda_t^i)_{t\geq 0}$ gegeben sei durch

$$\lambda_t^i = h_i \left(\sum_{j\to i} \int_0^{t-} \varphi_{ji}(t-s) \, \mathrm{d}Z_s^j \right). \tag{1}$$

Der Prozess $(\lambda_t^i)_{t\geq 0}$ heißt Intensitätsprozess von $(Z_t^i)_{t\geq 0}$.

Ein Hawkes-Prozess heißt linear, falls $h_i(x) = \mu_i + x$, wobei $\mu_i \geq 0$ für alle $i \in \mathcal{S}$.

Existenz und Eindeutigkeit

Es sei nun mit $(\pi^i(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z))_{i\in\mathcal{S}}$ eine Familie von iid $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-Poissonmaßen mit Intensitätsmaß $m(\mathrm{d}s \; \mathrm{d}z) = \lambda^2$ auf $[0, \infty) \times [0, \infty)$ bezeichnet.

Definition 2 (Hawkes-Prozesse als Lösung einer SDE)**.** Eine Familie $(Z_t^i)_{t\geq 0, i\in\mathcal{S}}$ von $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptierten càdlàg Prozessen heißt Hawkes Prozess mit Parametern $(\mathcal{G}, \varphi, h)$, falls für alle $i \in \mathcal{S}$ und für alle $t \geq 0$ gilt:

$$Z_t^i = \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty \mathbb{1}\big\{z \leq h_i\big(\sum_{j\to i} \int_0^{s-} \varphi_{ji}(s-u) \, \mathrm{d}Z_u^j\big)\big\} \pi^i(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z) \quad \text{fast sicher.} \tag{2}$$

Lemma (Äquivalenz der Definitionen eines Hawkes-Prozess)**.**

a) Ein Hawkes-Prozess im Sinne von Definition 2 ist ein Hawkes Prozess im Sinne von Definition 1.

b) Sei auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ ein Hawkes Prozess $(Z_t^i)_{t\geq 0, i\in\mathcal{S}}$ nach Definition 1 gegeben. Dann existiert auf einem (erweiterten) Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}, \tilde{\mathbb{P}})$ eine Familie $(\pi^i(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z))_{i\in\mathcal{S}}$ von iid $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t\geq 0}$-Poissonmaßen mit Intensitätsmaßen $m(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z) = \lambda^2$ auf $[0, \infty) \times [0, \infty)$, sodass $(Z_t^i)_{t\geq 0, i\in\mathcal{S}}$ ein Hawkes-Prozess nach Definition 2 ist.

Voraussetzung 1. *Es seien $(c_i)_{i\in\mathcal{S}}$ nicht-negative Konstanten, $(p_i)_{i\in\mathcal{S}}$ positive Gewichte und $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine lokal integrierbare Funktion.*
Es gelte außerdem:

i) Für alle $i \in \mathcal{S}$ und für alle $x, y \in \mathbb{R}$: $|h_i(x) - h_i(y)| \leq c_i|x - y|$

ii) $\sum\limits_{i\in\mathcal{S}} h_i(0)p_i < \infty$

iii) Für alle $t \in [0,\infty)$ und für alle $j \in \mathcal{S}$: $\sum\limits_{i\leftarrow j} c_i p_i |\varphi_{ji}(t)| \leq p_j \Phi(t)$

Beispiel.

(i) Im Falle einer endlichen Menge $\mathcal{S}$ ist die Voraussetzung 1 erfüllt, falls h_i Lipschitz für alle $i \in \mathcal{S}$, φ_{ji} lokal integrierbar für alle $(j,i) \in \mathcal{E}$ und $p_i = 1$ für alle $i \in \mathcal{S}$.

(ii) Sei $\mathcal{S} = \mathbb{Z}^d$ und $\mathcal{E} = \{(i,j) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} : \ |i - j| \in \{0,1\}\}$. Die Voraussetzung 1 ist erfüllt mit $p_i = 2^{-|i|}$, $c_i = c > 0$ und Φ lokal integrierbar, sodass h_i Lipschitz mit Konstante c für alle $i \in \mathcal{S}$, $\sum\limits_{i\in\mathcal{S}} p_i|h_i(0)| < \infty$ und $\varphi_{jk}(t) \leq \Phi(t)$ für alle $i \in \mathcal{S}$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$, für alle $(j,k) \in \mathcal{E}$ und für $t \geq 0$.

(iii) Für $\mathcal{S} = \mathbb{Z}_+$ und $\mathcal{E} = \{(i, i+1) : i \in \mathcal{S}\}$ ist die Voraussetzung 1 erfüllt, falls eine lokal integrierbare Funktion Φ und Konstanten c_i und a_i für alle $i \in \mathcal{S}$ existieren, sodass $|h_i(x) - h_i(y)| \leq c_i|x - y|$ und $|\varphi_{i(i+1)}(t)| \leq a_i\Phi(t)$ für alle $t \geq 0$.

(iv) Ist $\mathcal{S} = \mathbb{Z}^d$, $\mathcal{E} = \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ und existiere eine Konstante $c > 0$, eine lokal integrierbare Funktion Φ und eine nichtwachsende Funktion $a : [0,\infty) \to [0,\infty)$, so ist die Voraussetzung 1 erfüllt, falls $\sum\limits_{i\in\mathcal{S}} a(|i|) < \infty$, $|h_i(0)| \leq c$ und $|h_i(x) - h_i(y)| \leq c|x - y|$ für alle $i \in \mathcal{S}$ und $\varphi_{ji}(t) \leq a(|i - j|)\Phi(t)$ für alle $(i,j) \in \mathcal{E}$ und $t \geq 0$.

Satz (Existenz und Eindeutigkeit). *Unter Voraussetzung 1 existiert ein bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutiger Hawkes-Prozess $(Z^i_t)_{t\geq 0, i\in\mathcal{S}}$ nach Definition 2 mit der Eigenschaft, dass $\sum_{i\in\mathcal{S}} p_i\mathbb{E}[Z^i_t] < \infty$ für alle $t \geq 0$.*

Propagation of Chaos

Voraussetzung 2. *Es seien $h : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ und $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $\|h\|_{lip} = \sup\limits_{x \neq y} \frac{|h(x)-h(y)|}{|x-y|} < \infty$ und $\varphi \in L^2_{loc}([0,\infty))$.*
Für $N \geq 1$ sei $\mathcal{G}_N = (\mathcal{S}_N, \mathcal{E}_N)$ ein Graph mit Knotenmenge $\mathcal{S}_N = \{1,\dots,N\}$ und Kantenmenge $\mathcal{E}_N = \{(i,j)|i,j \in S_N\}$. Setze $h_i^N = h$ für alle $i \in \mathcal{S}_N$ und $\varphi_{ij}^N = \frac{1}{N}\varphi$ für alle $(i,j) \in \mathcal{E}_N$.

Definition (Grenzwertgleichung)**.** Sei $\pi(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z)$ ein Poisson Maß auf $[0,\infty) \times [0,\infty)$ mit Intensitätsmaß λ^2. Die Gleichung

$$\bar{Z}_t = \int_0^t \int_0^\infty \mathbb{1}_{\{z \leq h(\int_0^s \varphi(s-u)\mathrm{d}\mathbb{E}(\bar{Z}_u))\}} \pi(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z) \quad \forall t \geq 0$$

heißt Grenzwertgleichung („limit equation“).

Satz (Existenz und Eindeutigkeit)**.** *Unter Voraussetzung 2 existiert eine eindeutige Lösung $(\bar{Z}_t)_{t\geq 0}$ zu der Grenzwertgleichung, sodass $(\mathbb{E}(\bar{Z}_t))_{t\geq 0}$ lokal beschränkt ist.*

Bemerkung. Eine Lösung $(\bar{Z}_t)_{t\geq 0}$ der Grenzwertgleichung ist ein verallgemeinerter Poisson Prozess auf $[0,\infty)$.

Es sei mit $\mathbb{D}([0,\infty),\mathbb{R})$ die Menge der $\mathbb{R}$-wertigen càdlàg Funktionen auf $[0,\infty)$ und mit $\mathcal{P}(\mathbb{D}([0,\infty),\mathbb{R}))$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{D}([0,\infty),\mathbb{R})$ bezeichnet.
Satz. *Es gelte die Voraussetzung 2 und es sei mit $(\pi^i(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z))_{i=1,\dots,N}$ eine Familie von iid Poisson Maßen gegeben (mit Intensitätsmaß λ^2).*

i) Zu $N \geq 1$ lassen sich ein Hawkes-Prozess $(Z_t^{N,1},\dots,Z_t^{N,N})_{t\geq 0}$ mit den Paramtern $(\mathcal{G}_N, \varphi^N, h^N)$ und eine iid Familie $(\bar{Z}_t^i)_{t\geq 0, i=1,\dots,N}$ von Lösungen zu der Grenzwertgleichung konstruieren, sodass für alle $T > 0$ und alle $i = 1,\dots,N$ gilt:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{[0,T]} \left|Z_t^{N,i} - \bar{Z}_t^i\right|\right) \leq C_T \frac{1}{\sqrt{N}},$$

wobei die Konstante $C_T > 0$ nur von h, φ und T abhängt.

ii) Es gilt die „mean-field approximation“:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{\left(Z_t^{N,i}\right)_{t\geq 0}} \longrightarrow \mathcal{L}\left((\bar{Z}_t)_{t\geq 0}\right) \quad \text{in Wahrscheinlichkeit für } N \longrightarrow \infty$$

Wobei $\mathcal{P}(\mathbb{D}([0,\infty),\mathbb{R}))$ mit der Topologie der schwachen Konvergenz ausgestattet sei, die assoziiert ist zu der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Intervallen (auf $\mathbb{D}([0,\infty),\mathbb{R})$).

Anhang

Lemma 1. *Sei $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar und $\alpha : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ cadlag, von lokal endlicher Variation und $\alpha(0) = 0$. Dann gilt für alle $t \geq 0$*

$$\int_0^t \int_0^{s-} \phi(s-u)\,\mathrm{d}\alpha(u)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \int_0^s \phi(s-u)\,\mathrm{d}\alpha(u)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \phi(t-s)\alpha(s)\mathrm{d}s.$$

Lemma 2. *Sei $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ lokal integrierbar und $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ lokal beschränkt.*

1. *Sei u eine lokal beschränkte nicht negative Funktion, sodass für alle $t \geq 0$*

$$u_t \leq g_t + \int_0^t \phi(t-s)u_s\,\mathrm{d}s.$$

   Dann ist $\sup_{t\in[0,T]} u_t \leq C_T \sup_{t\in[0,T]} g_t$ für eine Konstante C_T, die nur von T und ϕ abhängt.

2. *Sei $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nicht negativen lokal beschränkten Funktionen, sodass für alle $t \geq 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$u_t^{n+1} \leq \int_0^t \phi(t-s)u_s^n\,\mathrm{d}s.$$

   Dann gilt $\sup_{t\in[0,T]} \sum_{n\in\mathbb{N}} u_t^n \leq C_T$ für eine Konstante C_T, die nur von T, u^0 und ϕ abhängt.

3. *Sei $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nicht negativen lokal beschränkten Funktionen, sodass für alle $t \geq 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$u_t^{n+1} \leq g_t + \int_0^t \phi(t-s)u_s^n\,\mathrm{d}s.$$

   Dann gilt $\sup_{t\in[0,T]} \sup_{n\in\mathbb{N}} u_t^n \leq C_T$ für eine Konstante C_T, die nur von T, u^0, g und ϕ abhängt.

Lemma 3. *Seien X, Y zwei nicht negative Zufallsvariablen. Dann gilt*

$$\int_0^\infty \mathbb{E}\big[|\mathbb{1}_{\{z\leq X\}} - \mathbb{1}_{\{z\leq Y\}}|\big]\,\mathrm{d}z = \mathbb{E}[|X-Y|].$$

Lemma 4. *Sei π ein zufälliges erweitertes Poissonmaß mit Intensität m. Dann gilt für jede beschränkte, previsible Abbildung $W : (\Omega \times \mathbb{R}_+ \times E, \tilde{\mathscr{P}}) \to \mathbb{R}$*

$$\mathbb{E}\Big[\int\limits_{\mathbb{R}_+ \times E} W(\omega; s, z)\pi(\omega; \mathrm{d}s, \mathrm{d}z) \Big] = \int\limits_{\mathbb{R}_+ \times E} \mathbb{E}\big[W(\omega; s, z)\big] m(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z).$$

Lemma 5. *Sei $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ Lipschitz und $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann besitzt die Gleichung*

$$m_t = \int_0^t h \left(\int_0^s \varphi(s - u)\mathrm{d}m_u \right) \mathrm{d}s \quad \forall t \geq 0 \tag{3}$$

eine eindeutige nichtfallende lokal beschränkte Lösung der Klasse $C^1([0, \infty))$.

Lemma 6. *Sei durch $(\mathbb{Q}_N)_{N \geq 1}$ eine Folge von symmetrischen Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{D}([0, \infty), \mathbb{R})^N$ gegeben. Für $\phi_1, \ldots, \phi_k \in C_b(\mathbb{D}([0, \infty), \mathbb{R}))$ und $k \geq 1$ gelte:*

$$\lim_{N \to \infty} \int \phi_1(x_1) \cdots \phi_k(x_k) \mathrm{d}\mathbb{Q}_N(x_1, \ldots, x_N) = \prod_{i=1}^k \int \phi_i(x) \mathrm{d}\mathbb{Q}(x)$$

für $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{D}([0, \infty), \mathbb{R})$. Dann gilt:

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{X_i} \longrightarrow \mathbb{Q} \quad \textit{in Verteilung.}$$

Literatur

[1] Sylvain Delattre, Nicolas Fournier, Marc Hoffmann, *Hawkes Processes On Large Networks*, Université Paris-Diderot, Université Pierre-et-Marie Curie, Université Paris-Dauphine, 2016.

[2] Jean Jacod, Albert N. Shiryaev, *Limit Theorems For Stochastic Processes*, Springer-Verlag, 2. Edition, 2002.

[3] Alain-Sol Sznitman, *Topics In Propagation Of Chaos*, Springer-Verlag, 1. Edition, 1991.