1.3 Maße auf $\mathbb{R}$

Wir können nun das Lebesgue-Maß λ eindeutig auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definieren durch

$$\lambda((a,b]) = b - a, \qquad a, b \in \mathbb{Q} \text{ mit } a \leq b.$$

Ebenso erhalten wir eine Charakterisierung aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Satz 1.20. *Eine Funktion $\mathbb{P} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß genau dann, wenn es eine wachsende rechtsstetige Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ gibt, so dass*

$$\mathbb{P}((a,b]) = F(b) - F(a), \qquad a, b \in \mathbb{Q}, a \leq b.$$

Offensichtlich ist $\mathbb{P}$ eindeutig durch F bestimmt!

Beweis. „$\Rightarrow$ “: klar

„$\Leftarrow$ “: Wir zeigen, dass $\mathbb{P}$ eine σ-additive Mengenfunktion auf dem Erzeugenden-Halbring

$$\mathcal{H} = \{(a,b] : a < b, \ \ a, b \in \mathbb{Q}\} \text{ ist.}$$

Seien also $\{(a_i, b_i] : i \geq 1\}$ paarweise diskjunkt (p.d.) und $\sum_{i\geq 1}(a_i, b_i] = (a,b]$. Ohne Einschränkung können wir umordnen in $\{(c_i, c_{i-1}]\}$ mit $\sum_{i\geq 1}(c_i, c_{i-1}] = (a,b]$ und $c_1 \geq c_2 \geq \ldots$ Dann gilt $c_i \to a$ und $c_1 = b$. (!)

Da F rechtsstetig ist, folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((a,b]) &= F(b) - F(a) = F(c_1) - \lim_{n\to\infty} F(c_n) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} F(C_n) - F(C_{u-n}) = \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}((c_n, c_{n-1})).\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus Theorem 1.19. □

Für uns wichtig werden Verteilungen, also Bildmaße sein.

Definition 1.21. Ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ heißt **Maßraum**, falls $\mathcal{F}$ σ-Algebra und μ Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ ist.

Definition 1.22. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum, $\mathcal{F}'$ eine σ-Algebra auf Ω'. Eine Funktion $f : \Omega \to \Omega'$ heißt $(\mathcal{F} - \mathcal{F}')$-messbar, falls

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F} \text{ für alle } A \in \mathcal{F}'.$$

Für ein solches f heißt $f_*\mu : \mathcal{F}' \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{0\}$, definiert durch

$$f_*\mu(A') = \mu(f^{-1}(A')) = \mu(\omega \in \Omega : f(\omega) \in A'), \quad A' \in \mathcal{F}'$$

Bildmaß von μ unter f.

Man zeigt leicht, dass $f_*\mu$ wieder ein Maß ist.

Die **von f erzeugte** σ-Algebra $f^{-1}(\mathcal{F}')$ ist in der Tat eine σ-Algebra. Ebenso gilt für $\sigma(\mathcal{C}') = \mathcal{F}'$, dass

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C}')) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}')).$$

Ist $(\Omega', \mathcal{F}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, so heißt f **reellwertig** und ist f $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar, so nennen wir f **Borel-messbar**.

Messbarkeit ist ein wichtiger Begriff, so dass wir ein paar Rechenregeln wiederholen.

Lemma 1.23. *Seien $(\Omega, \mathcal{F})$, $(\Omega', \mathcal{F}')$, $(\Omega'', \mathcal{F}'')$ Maßräume auf $f : \Omega \to \Omega'; g : \Omega' \to \Omega''$.*

(i) $\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{C}') \Rightarrow f$ *messbar* $\Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{C}') \subseteq \mathcal{F}$

(ii) f, g *messbar* $\Rightarrow f \circ g$ *messbar*

(iii) *stetige Abbildungen sind messbar (auf topologischen Räumen !) bzgl. der Borel-σ-Algebren.*

(iv) *Eine reellwertige Funktion f ist genau dann messbar, falls*

$$\{\omega : f(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} \quad \forall x \in \mathbb{Q}$$

(v) $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{A_i}$ *ist messbar* $\Leftrightarrow A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$.

(vi) $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar* $\Rightarrow f \cdot g, a \cdot f + b \cdot g, \frac{f}{g} \mathbb{1}_{\{g \neq 0\}}$ *messbar* $(a, b \in \mathbb{R})$

(vii) $f_1, f_2 : \Omega - \overline{\mathbb{R}}$ *messbar* $\Rightarrow$

$$\sup_n f_n, \inf_n f_n, \limsup_n f_n, \liminf_n f_n$$

messbar.

Am interessantesten ist wohl die Messbarkeit von $\sup_n f_n$:

$$\{\omega : \sup f_n(\omega) \leq x\} = \bigcap_{n\geq 1} \underbrace{\{\omega : f_n(\omega) \leq x\}}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}.$$

Messbare Funktionen sind durch einfache Funktionen approximierbar:

Wir setzen: $A_{j,n} = \begin{cases} \{\frac{j}{2^n} \leq f \leq \frac{j+1}{2^n}\}, & j = 0, \ldots, n \cdot 2^n - 1 \\ \{f \geq n\}, & j = n \cdot 2^n \end{cases}$ und $f_n = \sum_{j=0}^{n2^n} \frac{j}{2^n} \mathbb{1}_{\{A_{j,n}\}}$.

Dann gilt $f_n \uparrow f$.

Dies ist der Schlüssel zum Integral! Wir definieren für einfache Funktionen

$$\int f d\mu = \int \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \int_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i)$$

und für messbare, nicht-negative Funktionen und $f_n \uparrow f$

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \sup \left\{ \int g d\mu : g \text{ einfach und } 0 \leq g \leq f \right\}.$$

Dieses Integral können wir fortsetzten, falls mindestens ein Integral $\int f^+ d\mu, \int f^- d\mu$ endlich ist. Dann definieren wir

$$\mathcal{L}^1(\mu) := \left\{ f : \Omega \to \overline{\mathbb{Q}} : \int |f| d\mu < \infty \right\} \qquad \text{(und analog } L'\text{)}$$

Satz 1.24. *Einfache Eigenschaften*

(i) $f \leq g$ *f.ü. (d.h.* $\mu(\omega \in \Omega : f > g) = 0 \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$

(ii) $\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$ *(Dreiecksungleichung)*

(iii) $\int (af + bg) d\mu) a \int f d\mu + b \int g d\mu$ *(Linearität)*

(iv) $f = 0$ *f.ü.* $\Leftrightarrow \int f d\mu = 0$

(v) $\int f d\mu < \infty \Rightarrow f < \infty$ *f.ü.*

(vi) $f_n \uparrow f \Rightarrow \int f_n d\mu \uparrow \int f d\mu$.

Als Übung beweisen wir den einfachen Substitutionssatz

Satz 1.25. $g \in \mathcal{L}^1(f_* \mu) \Rightarrow g \circ f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ *und*

$$\int g \circ f d\mu = \int g d(f_* \mu).$$

Beweis. Es genügt, die Aussage für einfache nicht-negative g zu zeigen. Der allgemeine Fall folgt durch Approximation.

Sei $g = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{A_i} \Rightarrow g \circ f = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{\{f \in A_i\}}$, also

$$\int g \circ f d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(f \in A_i) = \sum_{i=12}^{n} c_i f_* \mu(A_i) = \int g d(f_* \mu).$$ □

Äußerst wichtig sind die folgenden Konvergenzsätze.

Theorem 1.26 (Monotone Konvergenz)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ Maßraum, $f_n \geq 0$ und $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar mit $f_n \uparrow f$ f.ü. $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} = \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Beweis. Folgt direkt aus der monotonen Konvergenz mit

$$g_n = (f - f_n) \mathbb{1}_{\{\omega \in \Omega : f_n(\omega) \uparrow f(\omega)\}}.$$ □

Theorem 1.27 (Fatou)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ Maßraum $f_1, f_2, \ldots : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \inf \int f_n d\mu \geq \int \lim_{n\to\infty} \inf f_n d\mu.$$

Beweis. $k \geq n \Rightarrow f_k \geq \inf_{k \geq n} f_k$, so dass

$$\inf_{k\geq n} \int f_k d\mu \geq \int \inf_{k \geq n} f_n d\mu.$$

Für $n \to \infty$ erhalten wir

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int \inf_{k\geq n} f_k d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu$$

wegen monotoner Konvergenz $(\inf_{k\geq n} f_k \uparrow \liminf_{n\to\infty} f_n)$. □

Theorem 1.28 (Majorisierte Konvergenz)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ Maßraum und $f, g, (f_n)_{n\geq 1} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Sei $|f_n| \leq g$ f.ü. und $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Beweis. Fatou auf $g+f$, $g-f$

Ohne Einschränkung $|f_n| \le g \ \ \forall \omega \in \Omega \Rightarrow$

$$(1)\quad \int (g+f)d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int (g+f_n)d\mu = \int g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

$$(2)\quad \int (g-f)d\mu \le \int g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu, \text{ also} \qquad \Big(\text{subtrahier } \int g d\mu\Big)$$

$$\int f d\mu \overset{(1)}{\le} \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu \le \limsup_{n\to\infty} \int f_n d\mu \overset{(2)}{\le} \int f d\mu.$$ □

Wir erinnern kurz an die $L^p(\mu)$-Räume

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \{f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar mit } \|f\|_p < \infty\} \text{ und}$$
$$\|f\|_p = \Big(\int |f|^p d\mu\Big)^{1/p}.$$
$$\|f\|_\infty = \inf\{K : \mu(|f| > k) = 0\}.$$

Es gilt für messbare f, g, dass

(i) $0 < p, q, r \le \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$: $\quad \|fg\|_r = \|f\|_p \|g\|_q$

(ii) $1 \le p \le \infty$: $\quad \|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$

Definition 1.29 (Konvergenz im p-ten Mittel)**.** Eine Folge $(f_n)_{n\ge 1} \subset \mathcal{L}^p(\mu)$ **konvergiert im p-ten Mittel**, falls

$$\|f_n - f\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Wir schreiben

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^p(\mu)} f.$$

Konvergiert eine Folge im p-ten Mittel, so auch im q-ten Mittel, falls $q < p$. (Hölder)

Außerdem ist $\mathcal{L}^p(\mu)$, $p \ge 1$ **vollständig** (jede Cauchy-Folge konvergiert).