Wahrscheinlichkeitstheorie **WS 2016/2017**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2016-17

Übung 8

Abgabe: 16.12.2016 in den Briefkästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ und $X_0, \dots, X_n$ unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen heißt die Verteilung von

$$\frac{X_0}{\sqrt{(X_1^2 + \ldots + X_n^2)/n}}$$

t-Verteilung mit n Freiheitsgraden. Zeigen Sie, dass diese für $n \to \infty$ schwach gegen die Standardnormalverteilung konvergiert.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die durch $\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\frac{i}{n}}$ definierte Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{P}([0,1])$ schwach gegen das Lebesguemaß auf $[0,1]$ konvergiert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien X, X_n für $n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen mit Werten in einem vollständigen und separablen Raum (E, r) mit $X_n \Longrightarrow X$ für $n \to \infty$. Ferner gelte $\mathbf{E}[g(X_n)] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbf{E}[g(X)]$ für eine stetige Funktion $g \in \mathcal{L}^1(X_*\mathbf{P})$ mit $g \geq 0$. Zeigen Sie, dass dann auch $\mathbf{E}[f(X_n)] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbf{E}[f(X)]$ für jede stetige Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ mit $|f| \leq g$ gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei $(\mathbf{P}_i)_{i \in I}$ eine Familie in $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $(\mathbf{P}_i)_{i \in I}$ ist straff.

(b) Für alle Projektionen $\pi_1, \dots, \pi_d$ ist $((\pi_k)_*\mathbf{P}_i)_{i \in I}$ straff.

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe)**.** Sei ψ die charakteristische Funktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbf{P}$ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. Zeigen Sie für alle $s, t \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$|\psi(t) - \psi(s)|^2 \leq 2(1 - \mathrm{Re}(\psi(t-s))).$$

Aufgabe 6 (Zusatzaufgabe)**.** Seien X und X_n für alle $n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen, die nur Werte in $\mathbb{Z}$ annehmen. Zeigen Sie:

$$X_n \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} X \iff \forall j \in \mathbb{Z} : \lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = P(X = j).$$

Hinweis: Für diesen Beweis benötigen Sie folgende Definitionen und folgendes Lemma, welches Sie ohne beweis nutzen dürfen:

Zunächst die Definition: Für einen metrischen Raum (E, r), bezeichne $\mathcal{P}(E)$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf E. Ferner sei $\mathcal{P}_{\leq 1}(E)$ die Menge der endlichen Maße μ mit $\mu(E) \leq 1$. Für ein Maß μ und einer Abbildung $f : E \to \mathbb{R}$ bezeichne

$$\mu[f] := \int_E f(x) dx.$$

Sei nun $\mu_1, \mu_2, \ldots \in \mathcal{P}_{\leq 1}$ und μ ein Maß auf E. Wir sagen $\mu_n \Rightarrow_v \mu$ (konvergiert vage) wenn

$$\mu_n[f] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu[f],$$

für alle $f \in \mathcal{C}_c(E)$, der Menge der beschränkten stetigen $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen auf E mit kompaktem Träger.

Bitte wenden

Wir können nun folgendes Lemma formulieren:

Lemma 1. Seien $P_1, P_2, \ldots \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ und $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})_{\leq 1}$ mit $P_n \Rightarrow_v \mu$. Dann gilt

$$\mu(\mathbb{R}) = 1 \Leftrightarrow (P_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{ist straff.}$$

In diesem Fall gilt dann $P_n \Rightarrow \mu$ (konvergiert schwach).