Wahrscheinlichkeitstheorie **WS 2016/2017**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2016-17

Übung 7

Abgabe: 09.12.2016 in den Briefkästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Mit einem Startkapital von 1 Euro spielen Sie folgendes Glücksspiel: Wenn Ihr Kapital vor der n-ten Runde K_{n-1} beträgt, gewinnen Sie in der n-ten Runde nach dem Wurf einer fairen Münze $\frac{2}{3}K_{n-1}$ dazu, sofern Kopf erscheint, sonst verlieren Sie $\frac{1}{2}K_{n-1}$.

a) Berechnen Sie EK_n, und überzeugen Sie sich, dass $\lim_{n\to\infty} EK_n = \infty$ ist.

b) Zeigen Sie, dass K_n stochastisch gegen 0 konvergiert.

Hinweis: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $K_n = \prod_{i=1}^n Y_i$ mit stochastisch unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen Y_i. Betrachten Sie in Teil b) die Zufallsvariable $\log K_n$ und wenden Sie das schwache Gesetz großer Zahlen an.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit

$$P(X_n = -n) = P(X_n = n) = \frac{1}{2n\log n} \qquad \text{und} \qquad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n}.$$

Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen, aber nicht dem starken Gesetz der großen Zahlen genügt.

Hinweis: Zeigen Sie, dass aus der Gültigkeit des starken Gesetzes folgen würde: $\frac{X_n}{n} \to 0$ P-fast-sicher.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Sei $M, K \in \mathbb{R}$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellen Zufallsvariablen mit $\mathrm{Var}\,(()\,X_n) \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass X_i und X_j unkorreliert sind, wenn $|i-j| > K$ ist. Zeigen Sie für $Z_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - EX_i)$ gilt $Z_{n^2} \to 0$ P-fast-sicher.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Seien $(X_n)_n$ und X reelle Zufallsvariablen. Dann:

(1) vollständige Konvergenz impliziert fast sichere Konvergenz:

$$\forall \epsilon > 0 : \sum_{n=0}^{\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) < \infty \Rightarrow X_n \overset{f.s.}{\to} X$$

(2) Seien die (X_n) unabhängig, dann gilt:

$$X_n \overset{f.s.}{\to} 0 \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n >\geq \epsilon) < \infty$$

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe). Es sei U eine auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable. Weiter sei $X := \cos(2\pi U)$ sowie $Y := \sin(2\pi U)$. Zeigen Sie X und Y sind unkorreliert aber nicht unabhängig.