Wahrscheinlichkeitstheorie

WS 2016/2017

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2016-17

Übung 6

Abgabe: 02.12.2016 in den Briefkästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Seien (X_n) eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen und X eine weitere $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable, so gilt

(1)
$$X_n \overset{f.s.}{\to} X \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|X_m - X| \geq \epsilon\}\right) = 0 \Leftrightarrow \sup_{m\geq n} |X_m - X| \overset{P}{\to} 0$$

(2) konvergiert $X_n \overset{f.s.}{\to} X$, so auch stochastisch ($X_n \overset{P}{\to} X$).

(3) Stochastisches Cauchy-Kriterium. Sind die (X_n) P-fast sicher konvergent, so ist das äquivalent dazu, dass für alle $\epsilon > 0$ folgendes gilt:
$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \{|X_{m+n} - X_n| \geq \epsilon\}\right) = 0$$

Aufgabe 2 (3 Punkte + 1 Bonuspunkt). Beweisen Sie die folgende Version des schwachen Gesetzes der großen Zahlen:

Seien (X_n) unabhängige und identisch verteilte (i.i.d) $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariablen. Ferner sei $\mathbb{E}\left[X_1^2\right] < \infty$. Dann gilt:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \overset{P}{\to} \mathbb{E}\left[X_1\right] < \infty.$$
Den Bonuspunkt bekommen Sie für $\mathbb{E}\left[X_1\right] < \infty$.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller, integrierbarer Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit $X_n \leq Y_n \leq Z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $X_n \to_P X$, $Y_n \to_P Y$ und $Z_n \to_P Z$. Zeigen Sie:

a) $X_n + Y_n \to_P X + Y$.

b) Gilt zusätzlich $E[X_n] \to E[X]$ und $E[Z_n] \to E[Z]$, so folgt $E[Y_n] \to E[Y]$.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei eine Folge von unabhängigen, identisch zum Parameter $\alpha > 0$ exponentialverteilten Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. Zeigen Sie

a) $P(\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} = \frac{1}{\alpha}) = 1$

b) $P(\liminf_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} = 0) = 1$.

Bitte wenden

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe). Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ wird ein Zufallsexperiment unabhängig wiederholt. Es sei A_n das Ereignis, im $n$ten Versuch einen Erfolg zu erzielen, wobei $P(A_n) = p, \forall n \in \mathbb{N}$. Das Ereignis

$$A_{n,m} := \bigcap_{n \leq k < n+m} A_k$$

bezeichnet eine mit dem $n$ten Versuch beginnende Erfolgsserie der Länge m. Zeigen Sie für $\alpha > 0$:

$$P(\limsup_{n \to \infty} A_{n, \lceil \alpha \ln n \rceil}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \frac{1}{\alpha} < \ln \frac{1}{p}, \\ 1, & \text{falls } \frac{1}{\alpha} > \ln \frac{1}{p}. \end{cases}$$

Hinweis: Wählen Sie ein geeignetes $\delta > 0$ und zeigen Sie, dass die Folge $(A_{\lceil k^{1+\delta} \rceil, \lceil \alpha \ln \lceil k^{1+\delta} \rceil \rceil})_{k \geq k_0}, k_0 \in \mathbb{N}$, unabhängig ist.

Aufgabe 6 (Zusatzaufgabe). Beweisen Sie die beiden Korollare aus der Vorlesung. Diese Beweise können Sie im Pfaffelhuber Skript finden, aber versuchen Sie es zunächst selber!