Wahrscheinlichkeitstheorie **WS 2016/2017**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2016-17

Übung 5

Abgabe: 25.11.2016 in den Briefkästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Für ein Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne $\hat{\mu}$ die Fourier-Transformierte. Zeigen Sie, dass für Wahrscheinlichkeitsmaße μ, ν gilt:

(a) $\widehat{\mu + \nu} = \hat{\mu} + \hat{\nu}$.

(b) Für $alpha > 0$ ist $\widehat{\alpha\mu} = \alpha\hat{\mu}$.

(c) $\widehat{\mu * \nu} = \hat{\mu} \cdot \hat{\nu}$

(d) Für jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ist

$$\widehat{T(\mu)} = \hat{\mu} \circ T^\top,$$

mit $T^\top$ die transponierte lineare Abbildung von T.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Seien X, Y zwei $\mathbb{R}$-wertige ZV'n. Zeigen Sie dass wenn X, Y unabhängig, dann gilt für die charakteristische Funktion $\varphi_{(X.Y)}$ des Zufallsvekrors (X, Y):

$$\varphi_{(X,Y)}(u_1, u_2) = \varphi_X(u_1) \cdot \varphi_Y(u_2)\ ,\ (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Wenn Sie die Rückrichtung zeigen können, dann bekommen Sie 2 Zusatzpunkte. Dieses Resultat lässt sich auf Zufallsvektoren X und Y verallgemeinern.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Characteristische Funktion der folgenden Verteilungen:

(a) Normalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$ als Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\varphi'(x) = -x\varphi(x).$$

Zeigen Sie zunächst dass φ die eindeutige Lösung sein muss und lösen Sie dann die Differentialgleichung. Nutzen Sie, dass für $u \in \mathbb{R}$

$$e^{iu} = cos(u) + isin(u).$$

gilt. Leiten Sie nun die allgemeine Characteristische Funktion für $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ her.

(b) Negative Binomialverteilung: Eine ZV X ist negativ Binomialverteilt, wenn sie $\mathbb{N}_0$-wertig ist mit

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k + r - 1}{k} p^r (1 - p)^k$$

für $k \in \mathbb{N}_0$.

(c) Gleichverteilung auf dem Intervall (a, b), mit $a < b$.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (4 Punkte + 2 Pluspunkte)**.** Eine $\mathbb{R}^d$-wertige ZV X heißt multivariat normalverteilt ($\mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$) mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}^d$ und Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$, Σ symmetrisch und positiv definit, falls sie die Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$$

hat. Zeigen Sie zunächst, dass Σ seinen Namen verdient hat, also $\mathbb{E}\left[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right] = \Sigma_{i,j}$ gilt. Zeigen Sie nun, dass dass die Koeffizienten von X genau dann unabhängig sind, wenn $\Sigma_{i,j} = c_{ij}\delta_{ij}$ für Konstanten c_{ij} gilt. Bestimmen Sie nun die characteristische Funktion von X für gegebenes μ und Σ (echt positiv definit!).

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass zwei Zufallsvektoren mit stetigen Dichten f_1, f_2 auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^d$ genau dann unabhängig sind, wenn für die gemeinsame Dichte $f_{1,2}(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ gilt.

Aufgabe 5 (2 Pluspunkte)**.** Für ein Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ bezeichne $\hat{\mu}$ die Fourier-Transformierte. Für ein weiteres Maß ν auf $\mathbb{R}^d$ sei $\mu \otimes \nu$ das Produktmaß. Gehen Sie davon aus dass μ und ν Wahrscheinlichkeitsmaße sind. Zeigen Sie

$$\widehat{\mu \otimes \nu}(x,y) = \hat{\mu}(x) \cdot \hat{\nu}(y) \ , \forall \ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d.$$