Wahrscheinlichkeitstheorie **WS 2016/2017**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2016-17

Übung 4

Abgabe: 18.11.2016 in den Briefkästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie, dass für alle messbaren Abbildungen
$f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt:

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty := \inf\{a \in \mathbb{R}_+ : P(|f| \geq a) = 0\}.$$

Zeigen Sie ferner, dass für $(\Omega, \mathcal{A}, P) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), U(0,1))$ und $f(x) := \log(|\frac{1}{x}|)$ gilt: $\|f\|_p < \infty$ für alle $p \in \mathbb{N}$, aber $\|f\|_\infty = \infty$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei F die Verteilungsfunktion einer $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen. Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}} (F(x+c) - F(x))\, dx = c,$$

für beliebiges $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer, messbarer, reeller Funktionen auf Ω, die punktweise gegen eine Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ konvergiert. Zeigen Sie, dass im Falle $\lim_{n\to\infty} \mu[f_n] = 7$ auch f μ-integrierbar ist mit $\mu[f] \leq 7$. Zeigen Sie ferner anhand eines Beispiels, dass $\mu[f]$ jeden Wert in $[0,7]$ annehmen kann.

Hinweis: Wählen Sie z.B. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), U(0,1))$ und $f := c \cdot \mathbb{1}_{(0,1]}$ für vorgegebenes $c \in [0,7]$.

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte)**.** Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig. Weiterhin seien $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ unabhängige auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Sei Z_i eine Bernoulli Zufallsvariable (d.h. sie nimmt nur die Werte in $\{0,1\}$ an) gegeben durch

$$Z_i = \mathbb{1}_{\{Y_i \leq f(X_i)\}}.$$

(a) Zeigen Sie $P(Z_i = 1) = \int_0^1 f(x)dx$. Fassen Sie dazu (X_i, Y_i) als Punkt in $[0,1]^2$ auf und betrachten Sie zunächst die gemeinsame Verteilung.

Betrachten Sie $S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i$. Zeigen Sie $S_n \to \int_0^1 f(x)dx$ in Wahrscheinlichkeit. Können Sie eine stärkere Aussage treffen? Wir wollen das Integral $\int_0^1 f(x)dx$ durch S_n approximieren. Dabei soll n mindestens so groß gewählt werden, das mit W'keit $0,95$ das Integral mit maximalem Fehler $0,01$ approximiert wird. Bestimmen Sie ein solches n (möglichst kleines) mit Hilfe

(b) der Chebyshev-Ungleichung

(c) des zentralen Grenzwertsatzes.

Hinweis: Sie dürfen die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung (bzw. die Inverse) mit Hilfe von wolfram alpha numerisch berechnen. Das von Ihnen gefundene n soll hier unabhängig von der konkreten Wahl von f sein, betrachten Sie also den worst case wobei Sie annehmen dürfen dass das Integral $0 < \int_0^1 f(x)dx < 1$ erfüllt.

Bitte wenden

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe)**.** Welche der folgenden Teilmengen des Raumes der reellen Folgen

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \bigtimes_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$$

sind messbar bzgl. $\mathfrak{B}^{\mathbb{N}} := \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{B}(\mathbb{R})$?

(a) $\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n > 3\}$

(b) $\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \text{ für mindestens ein } n \in \mathbb{N}\}$

(c) $\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen } 3\}$

Aufgabe 6 (Zusatzaufgabe)**.**

(a) Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen mit stetigen Dichten f_X, f_X. Entsprechend seien F_X, F_Y die Verteilungsfunktionen. Zeigen Sie

$$F_{X+Y}(t) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) F_Y(t-x) dx$$

(b) Sei Z eine weitere Zufallsvariable so dass X, Y, Z unabhängig sind. Zeigen Sie formal dass dann auch $X + Y$ unabhängig von Z ist.