Wahrscheinlichkeitstheorie WS 2016/2017

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2016-17

Übung 3

Abgabe: 11.11.2016 in den Briefkästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Es sei $r : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$r((x,y),(u,v)) = |xy - uv|,\ (x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Untersuchen Sie jeweils, ob (M_1, r) oder (M_2, r) metrische Räume sind. Dabei sei

$$M_1 = \{(x,y)|\, x \leq y; x,y \in \mathbb{N}\}, \quad M_2 = \{(x,y)|\, x \leq y; x \text{ und } y \text{ sind Primzahlen}\}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass zwei σ-endliche Maße μ, ν auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ genau dann übereinstimmen, wenn für alle stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit kompakten Träger $\mu[f] = \nu[f]$ gilt. Hierbei ist für ein Maß μ:

$$\mu[f] := \int_\Omega f d\mu.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Geben Sie ein Beispiel für zwei Maße μ, ν an, mit $\nu << \mu$ für das keine Dichte f mit $d\nu = f d\mu$ existiert.

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Beweisen Sie das letzte Lemma (51) aus der Vorlesung:

Sei I abzählbar und für jedes i sei $(\Omega_i, \mathcal{O}_i)$ polnisch. Dann gilt

$$\mathcal{B}(\Omega) = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{B}(\Omega_i),$$

mit dem Produktraum Ω wie in der Vorlesung definiert.

Hinweis: Überlegen Sie sich eine geeignete Basis (topologische) ihres Produktraumes und argumentieren Sie geschickt.

Bitte wenden

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe)**.** Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter λ. Zeigen Sie, dass für beliebige $t, s \in [0, \infty)$ gilt

$$\mathbf{P}(X > t + s | X > s) = P(X > t)$$

Interpretieren Sie dieses Resultat. Was hat es anschaulich zu bedeuten? Zeigen Sie weiterhin, dass jede $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable mit obiger Eigenschaft exponentialverteilt ist.

Zur Erinnerung: Für Ereignisse A, B mit $\boldsymbol{P}(B) > 0$ ist

$$\boldsymbol{P}(A|B) = \frac{\boldsymbol{P}(A, B)}{\boldsymbol{P}(B)}.$$