Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2016-17

Übung 2

Abgabe: 04.11.2016 in den Briefkästen.

Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Sei $\Omega = \mathbb{R}_+$ mit Borel σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Sei F_θ die Verteilungsfunktion

$$F_\theta(a) = 1 - e^{-\theta a}, a \in \mathbb{R}_+,$$

also die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung mit Parameter $\theta \in \mathbb{R}_+$. Wir definieren nun die Mengenfunktion $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \to [0,1]$ durch

$$\mu(A) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}_+} \mu_\theta(A),$$

wobei $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ und μ_θ das eindeutige Wahrscheinlichkeitsmaß zu F_θ ist. Zeigen Sie dass μ eine subadditive Mengenfunktion ist, die nicht echt additiv ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass das System der k-dimensionalen Quader

$$\mathcal{Q}^k := \{(a,b] \,|\, a, b \in \mathbb{R}^k,\ a \leq b\}.$$

ein Halbring ist, wobei für $a = (a_1, a_2, \dots, a_k), b = (b_1, b_2, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k$ das Intervall $(a,b]$ definiert ist durch

$$(a,b] := (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \cdots (a_k, b_k].$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengensysteme jeweils einen Halbring, einen Ring oder eine σ-Algebra bilden.

- $\mathcal{A} := \{N \subset \mathbb{N} : |N| < \infty \vee |N^c| < \infty\}$,
- $\mathcal{B} := \{N \subset \mathbb{N} : |N| = \infty \vee |N^c| = \infty\}$,
- $\mathcal{C} := \{N \subset \mathbb{R} : |N| = \infty \wedge |N^c| = \infty\}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass das System $\mathcal{C} := \{(-\infty, b] \,|\, b \in \mathbb{R}^k\}$ die Borelsche-σ Algebra $\mathcal{B}^k$ erzeugt. Hierbei ist

$$\mathcal{B}^k = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$$

und

$$(-\infty, b] = (-\infty, b_1] \times (-\infty, b_2] \times \ldots \times (-\infty, b_k].$$

Aufgabe 5 (2 Punkte)**.** Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\mathcal{N}_\mu := \{A \subset \Omega | \exists N \in \mathcal{A} : \mu(N) = 0, A \subset N\}$ das System aller Teilmengen von μ-Nullmengen und

$$\tilde{\mathcal{A}} := \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}_\mu\}.$$

Zeigen Sie

(a) $\tilde{\mathcal{A}}$ ist eine σ-Algebra,

(b) $\tilde{\mathcal{A}} = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}_\mu)$.

Bitte wenden

Ab sofort werden wir Ihnen freiwillige Zusatzaufgaben an das Ende einiger Übungsblätter stellen. Diese Aufgaben sind Zusatzaufgaben, sie werden weder bepunktet noch korrigiert. Viel mehr dienen sie dazu Ihnen zusätzlichen Übungsstoff bereitzustellen. Es kann aber sein dass eine solche Aufgabe zu einem späteren Zeitpunkt als reguläre Aufgabe auf einem anderen Übungsblatt auftaucht, es lohnt sich also sich diese anzugucken ;-)

Als Tipp: Wenn Sie noch vor dem Ende des Tutoriums mit dem Blatt fertig sind, gucken Sie sich diese Aufgaben doch einmal an.

Es wird auch noch Zusatzaufgaben für dieses Blatt geben, ca Freitag werden diese hier erscheinen.

Aufgabe 6 (Zusatzaufgabe)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ und $\sigma(f)$ die von f bezüglich $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ erzeugte σ-Algebra. Bestimmen Sie alle $\sigma(f)$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbaren Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.