# Wahrscheinlichkeitstheorie **WS 2016/2017**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2016-17

## Übung 12

**Abgabe: 02.02.2017 in den Briefkästen.**

**Aufgabe 1** (8 Punkte)**.** Sei $x = (x_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Ferner sei $a < b$ zwei reelle Zahlen. Wir definieren $T_0(x) = 0$ und induktiv für $k \geq 0$

$$S_{k+1}(x) = \inf\{n \geq T_k(x) : x_n \leq a\}$$

sowie

$$T_{k+1}(x) = \inf\{n \geq S_{k+1}(x) : x_n \geq b\}.$$

Hierbei setzen wir wie üblich $\inf \emptyset = \infty$. Wir definieren nun

$$N_n([a,b], x) = \sup\{k \geq 0 : T_k(x) \leq n\}.$$

Erklären Sie mit Worten, was die Zahl $N_n([a,b], x)$ bedeutet. Sei nun $X$ ein Supermartingal. Zeigen Sie für $n \geq 0$ die Ungleichung

$$(b-a)\mathbb{E}\left[N_n([a,b], X)\right] \leq \mathbb{E}\left[(X_n - a)^-\right].$$

**Aufgabe 2** (4 Punkte)**.** Für einen adaptierten Prozess $X = (X_t)_{t=0,\dots,T}$ mit $\mathbb{E}\left[|X_i|\right] < \infty$, zeigen Sie die Äquivalenz

$$\mathbb{E}\left[X_t | \mathcal{F}_s\right] = X_s \;\forall\, 0 \leq s \leq t \leq T \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[X_{t+1} | \mathcal{F}_t\right] = X_t \;\forall\, t = 0, \dots, T-1.$$

**Aufgabe 3** (4 Punkte)**.** Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige, identisch verteilte (i.i.d.) und gleichförmig beschränkte Zufallsvariablen mit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Definiere

$$M_n(\lambda) = \frac{\exp(\lambda S_n)}{\left(\mathbb{E}\left[\exp(\lambda X_1)\right]\right)^n}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie das der Prozess $(M_n(\lambda))_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bzgl. der natürlichen Filtration ist.

**Aufgabe 4** (Zusatzaufgabe)**.** Sei $p \in [0,1]$ und $X$ ein stochastischer Prozess mit Werten in $[0,1]$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelte: Gegeben $X_0, \dots, X_n$ ist

$$X_{n+1} = \begin{cases} 1 - p + pX_n & \text{mit Wahrscheinlichkeit } X_n \\ pX_n & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - X_n, \end{cases}$$

wobei $X_0$ deterministisch ist. Zeigen Sie, dass $X$ ein Martingal ist und fast sicher konvergiert. Bestimmen Sie die Verteilung des fast sicheren Grenzwertes.