

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt

Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi

<http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2016-17>

## Übung 11

**Abgabe: 27.01.2017 in den Briefkästen.**

**Aufgabe 1** (4 Punkte). Sei  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit  $\mathbb{E}[X_i] = \mu$  und  $\mathbb{E}[X_i^2] = \nu$  wobei  $\mu \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{R}_+$ . Definiere die Familie  $S_n, n \in \mathbb{N}_0$  mit  $S_0 = 0$  und  $S_n = X_n + S_{n-1}$ . Sei ferner  $p_n := P(S_n \geq 0)$ . Bestimmen Sie für  $n \geq m$

$$\mathbb{E}[S_n | \sigma(S_m)], \quad \mathbb{E}[S_n | \sigma(S_m^2)], \quad \mathbb{E}[S_n^2 | \sigma(S_m)], \quad \mathbb{E}[S_m | \sigma(S_n)], \quad \mathbb{E}[X_i | \sigma(S_n)]$$

**Aufgabe 2** (4 Punkte). Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Sei  $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$  eine  $\sigma$ -Algebra und  $X$  eine Zufallsvariable mit  $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ . Zeigen Sie dass  $\mathbb{E}[X | \mathcal{A}]$  die orthogonale Projektion von  $X$  auf  $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ist, d.h. es gilt für jede  $\mathcal{A}$  messbare Zufallsvariable  $Y$  mit  $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$  die Ungleichung

$$\mathbb{E}[(X - Y)^2] \leq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X | \mathcal{A}])^2]$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $Y = \mathbb{E}[X | \mathcal{A}]$ . *Hinweis: Vielleicht ist die Ungleichung  $a^2 \leq 2(a - b) + 2b^2, a, b \in \mathbb{R}$  nützlich.*

**Aufgabe 3** (4 Punkte). Man zeige durch ein Beispiel dass  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{A}] | \mathcal{F}] \neq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{F}] | \mathcal{A}]$  gelten kann.

**Aufgabe 4** (4 Punkte). Seien  $X_1, X_2$  unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter  $\theta > 0$ . Man bestimme

$$\mathbb{E}[X_1 \wedge X_2 | X_1].$$