Wahrscheinlichkeitstheorie **WS 2016/2017**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2016-17

Übung 10

Abgabe: 20.01.2017 in den Briefkästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $Z \in \mathbb{R}^{n+m}$ eine Multivariat-Normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswertvektor μ und Kovarianzmatrix Σ. Betrachten Sie die Zerlegung

$$Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & \sigma_Y \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Verteilung von $X|_Y$, also die bedingte Verteilung von X gegeben Y.

Aufgabe 2 (4 Punkte). Für eine $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariable X sind der *Erwartungswertvektor* $\mathbf{E}[X] \in \mathbb{R}^d$ und die *Kovarianzmatrix* $\mathbf{COV}(X) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ definiert durch $(\mathbf{E}[X])_i := \mathbf{E}[X_i]$ und $(\mathbf{COV}(X))_{ij} := \mathbf{E}[(X_i - \mathbf{E}(X_i))(X_j - \mathbf{E}(X_j))]$ für $i,j = 1,\dots,d$, wobei $X_1,\dots,X_d$ die Komponenten von X bezeichnen. Zeigen Sie:

(a) Die Kovarianzmatrix $\mathbf{COV}(X)$ ist symmetrisch und positiv semidefinit.

(b) Es existiert eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ mit $\mathbf{COV}(X) = BB$.

(c) Für alle $A \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $b \in \mathbb{R}^k$ gilt $\mathbf{COV}(AX + b) = A\mathbf{COV}(X)A^\top$.

Hinweis: Verwenden Sie bei 2. den Satz von der Hauptachsentransformation.

Aufgabe 3 (4 Punkte). Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sei X eine zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariable. Für $t > 0$ sei $Y_t := \min\{X, t\}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{E}[X \mid Y_t] = X\mathbb{1}_{\{X<t\}} + \left(t + \frac{1}{\lambda}\right)\mathbb{1}_{\{X\geq t\}}.$$

Hinweis: Betrachten Sie einen Erzeuger von $\sigma(Y_t)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte). Es sei $X \in \mathcal{L}^3$ eine reellwertige Zufallsvariable. Ihre *momentenerzeugende Funktion* ist gegeben durch $M(t) : \mathbb{R} \to [0,\infty), t \mapsto \mathbf{E}[e^{tX}]$ und $K := \log \circ M$ bezeichnet ihre *kumulantenerzeugende Funktion*. Zeigen Sie, dass

$$K(0) = 0, K'(0) = \mathbf{E}[X], K''(0) = \mathbf{V}[X] \text{ und } K^{(3)}(0) = \mathbf{E}\big[(X - \mathbf{E}[X])^3\big]$$

und berechnen Sie K für $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe). Seien $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$ Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ mit $X_n \sim Y_n$ für alle n. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $X_n \to_p 0 \Leftrightarrow Y_n \to_p 0$.

(b) $X_n \to_{fs} 0 \Leftrightarrow Y_n \to_{fs} 0$.

(c) $X_n \to_{\mathcal{L}^1} 0 \Leftrightarrow Y_n \to_{\mathcal{L}^1} 0$.

Hinweis: $X \sim Y$ bedeutet, dass $X_*\mathbf{P} = Y_*\mathbf{P}$.