Wahrscheinlichkeitstheorie **WS 2016/2017**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Wahid Khosrawi-Sardroudi
http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2016-17

Übung 1

Abgabe: 28.10.2016 in den Briefkästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Gegeben sei eine Menge Ω. Sei $\mathcal{C} \subset 2^\Omega$ ein Ring über Ω. Zeigen Sie:

(a) Eine Mengenfunktion $\mu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ auf $\mathcal{C}$ ist genau dann additiv, wenn Sie endlich additiv ist.

(b) Die Aussage in (a) ist im allgemeinen falsch, wenn $\mathcal{C}$ ein Halbring ist.

Hinweis: Wir nennen μ additiv wenn für disjunkte Mengen $A, B \in \mathcal{C}$ (ein plus bedeutet dei Mengen sind disjunkt)

$$\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B)$$

gilt. Wir nennen μ endlich additiv wenn für jede endliche disjunkte Familie $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{C}$ mit $\sum_{i\in I} A_i \in \mathcal{C}$

$$\mu(\sum_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} \mu(A_i)$$

gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $\mathcal{R} \subset 2^X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $(\mathcal{R}, \triangle, \cap)$ ist ein Ring im Sinne der Algebra.

b) $\emptyset \in \mathcal{R}$ und für $A, B \in \mathcal{R}$ gilt $A \triangle B \in \mathcal{R}$, $A \cap B \in \mathcal{R}$.

c) $\emptyset \in \mathcal{R}$ und für $A, B \in \mathcal{R}$ gilt $A \triangle B \in \mathcal{R}$, $A \cup B \in \mathcal{R}$.

d) $\mathcal{R}$ ist ein Ring im Sinne der Maßtheorie.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $f : X \to Y$ ein Abbildung und sei $\mathcal{R}$ ein Ring bzw. Algebra über Y. Zeigen Sie, dass

$$f^{-1}(\mathcal{R}) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{R}\}$$

ein Ring bzw. Algebra über X ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Sei Ω eine endliche Menge, sei $|\Omega| \geq 4$ und gerade. Setze

$$\mathcal{D} := \{D \subset \Omega \mid \ |D| \in 2\mathbb{N}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System, aber keine σ-Algebra ist.