

Übungen zur Vorlesung “Stochastische Prozesse“

Wintersemester 2016/17, Blatt 13

Abgabetermin: 30.01.2017, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.16., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 47 (4 Punkte)

Seien $X_n, X, n \in \mathbb{N}$, Zufallsvariablen mit Werten in einem metrischen Raum (\mathcal{E}, d) . Zeigen Sie:

- Gilt $X_n \rightarrow_{\mathcal{D}} X$ und ist $h: (\mathcal{E}, d) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so folgt $h(X_n) \rightarrow_{\mathcal{D}} h(X)$.
- Gilt $X_n \rightarrow_{\mathcal{D}} X$ und $d(X_n, Y_n) \rightarrow_P 0$, so folgt $Y_n \rightarrow_{\mathcal{D}} X$.

Aufgabe 48 (4 Punkte)

Beweisen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

- $X_n \rightarrow_P X \implies X_n \rightarrow_{\mathcal{D}} X$,
- $X_n \rightarrow_{\mathcal{D}} X \implies X_n \rightarrow_P X$,
- $X_n \rightarrow_P a \implies X_n \rightarrow_{\mathcal{D}} a$,
- $X_n \rightarrow_{\mathcal{D}} a \implies X_n \rightarrow_P a$,

für $a \in \mathbb{R}$ und Zufallsvariablen $X_n, X, n \in \mathbb{N}$, mit Werten in einem separablen metrischen Raum (\mathcal{E}, d) .

Aufgabe 49 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

- Für alle $x \in D[0, 1]$ und für alle $\varepsilon > 0$ existieren Punkte t_0, \dots, t_n so, dass

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1 \quad \text{und} \quad \omega_x[t_{i-1}, t_i] < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei $\omega_x(T) := \sup_{s, t \in T} |x(s) - x(t)|$ für $T \subset [0, 1]$.

- Jedes $x \in D[0, 1]$ hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.
- Für $x \in D[0, 1]$ gilt $\|x\| = \sup_t |x(t)| < \infty$.

Aufgabe 50 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$d_S(x, y) := \inf_{\lambda \in \Lambda} \max \left\{ \sup_t |t - \lambda(t)|, \sup_t |x(t) - y(\lambda(t))| \right\}$$

mit $\Lambda := \{\lambda: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \mid \lambda \text{ ist bijektiv und streng monoton wachsend}\}$ eine Metrik auf $\mathcal{D}[0, 1]$ definiert.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:

<https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-stochastische-prozesse-ws-2016-17>