Übungen zur Vorlesung
“Stochastische Prozesse“

Wintersemester 2016/17, Blatt 12

Abgabetermin: 23.01.2017, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.16., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 43 (4 Punkte)

Sei $(B_t)_t$ eine stBB und sei $\tau_x := \inf\{t \geq 0\colon B_t = x\}$ für $x \geq 0$. Zeigen Sie, dass $(\tau_x)_{x\geq 0}$ ein Prozess mit stochastisch unabhängigen und identisch verteilten Zuwächsen ist.

Aufgabe 44 (4 Punkte)

Sei $(B_t)_t$ eine stBB. Zeigen Sie: Für $\mathbb{P}$-fast alle ω gilt $\lambda(\{0 \leq t \leq 1 | B_t(\omega) = 0\}) = 0$.

Hinweis: Man zeige $\mathbb{E}[\lambda(\{0 \leq t \leq 1|B_t(\omega) = 0\})] = 0$ $\mathbb{P}$-fast sicher. Zeigen Sie gegebenenfalls, dass jeder stetige stochastische Prozess $(X(t)\,, t \in [0,1])$ als Abbildung $[0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}$ messbar ist.

Aufgabe 45 (4 Punkte)

Sei $(B_t)_t$ eine stBB. Zeigen Sie: $\mathbb{P}(\sup_{0\leq s\leq t} B_s > \sqrt{2t \log\log\log t}) \xrightarrow{t\to\infty} 0$. Widerspricht dies dem Gesetz des iterierten Logarithmus? Begründen Sie.

Aufgabe 46 (4 Punkte)

Sei $B = (B_t)_t$ eine stBB.

a) Zeigen Sie, dass B fast sicher für jedes $\varepsilon > 0$ mindestens eine Nullstelle in $(0, \varepsilon)$ hat.

b) Sei $A(\omega) := \{t \in [0,\infty) | B_t(\omega) = 0\}$. Zeigen Sie mit Hilfe der starken Markoveigenschaft und a), dass A fast sicher eine abgeschlossene Menge ohne isolierte Punkte ist.