Übungen zur Vorlesung "Stochastische Prozesse"

Wintersemester 2016/17, Blatt 11

Abgabetermin: 16.01.2017, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.16., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 39 (4 Punkte)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine stBB sowie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und T_a die erste Treffzeit von a. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[T_a] = \infty$.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst mit Aufgabe 36 : Für jedes $x > 0$ gilt $\mathbb{E}[e^{-xT_a}] = e^{-|a|\sqrt{2x}}$.

Aufgabe 40 (4 Punkte)

Sei $(B_t)_t$ eine stBB und $(t_n)_n$ eine monoton fallende Nullfolge. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{B_{t_n}}{\sqrt{t_n}} = \infty\right) = 1\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Mengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n := \left\{\frac{B_{t_n}}{\sqrt{t_n}} \geq K\right\}$ für $K \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) > 0$ gilt.

Aufgabe 41 (4 Punkte)

Sei $(B_t)_t$ eine stBB und seien $a \geq 0$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Weiter sei $\tau_b = \inf\{t \geq 0 | B_t = b\}$. Zeigen Sie:

a) Für die Verteilung des Supremums von $(B_t)_t$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} B_s \geq a\right) = \mathbb{P}(|B_t| > a) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2t}}\,\mathrm{d}x\,.$$

b) Die Verteilung von τ_b hat die Lebesgue-Dichte

$$f_b(t) = \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{b^2}{2t}} \cdot \mathbb{1}_{\{t>0\}}(t)\,.$$

Hinweis: Folgern Sie b) aus a) mit Hilfe der Substitution $y := \frac{x}{\sqrt{t}}$.

Aufgabe 42 (4 Punkte)

Sei $(B_t)_t$ eine stBB mit natürlicher Filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ und sei $L := \sup\{t \leq 1 | B_t = 0\}$.

a) Zeigen Sie für $0 < a < b$, dass $\mathbb{P}\left(B_t \neq 0\ \forall t \in [a,b]\right) = \int \mathbb{P}(\tilde{\tau}_{-y} > b - a)\,\mathrm{d}\mathbb{P}^{B_a}(y)$ gilt, wobei $\tilde{\tau}_s := \inf\{t \geq 0 | \tilde{B}_t = s\}$ ist für eine von $\mathcal{F}_{a+}$ unabhängige stBB $(\tilde{B}_t)$.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(L \leq s) = \frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{s})$.

Hinweis: Zeigen Sie für Teil b), dass $\mathbb{P}(L \leq s) = \frac{1}{\pi}\int_{1-s}^\infty \sqrt{\frac{(r+s)^2}{rs}} \cdot \frac{s}{(r+s)^2}\,\mathrm{d}r$, indem Sie Teil a) und Aufgabe 41b) verwenden. Transformieren Sie dann das Integral mit $t(r) = \sqrt{\frac{s}{r+s}}$.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-stochastische-prozesse-ws-2016-17