Übungen zur Vorlesung
“Stochastische Prozesse“

Wintersemester 2016/17, Blatt 10

Abgabetermin: 09.01.2017, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.16., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 35 (3 Punkte)

Sei $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,\infty))$ die Menge der stetigen Funktionen von $[0,\infty)$ nach $\mathbb{R}$. Sei $\mathcal{B}^{[0,\infty)}$ die Produkt-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$. Zeigen Sie:

a) Einelementige Mengen sind nicht messbar bzgl. $\mathcal{B}^{[0,\infty)}$.

b) $\mathcal{C} \notin \mathcal{B}^{[0,\infty)}$, d.h. $\mathcal{C}([0,\infty))$ ist nicht messbar bzgl. der Produkt-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$.

Aufgabe 36 (5 Punkte)

Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine standardisierte Brownsche Bewegung in $\mathcal{C}([0,\infty))$. Sei $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ mit $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s \colon s \leq t)$. Seien $c > 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) $-B$ ist eine standardisierte Brownsche Bewegung.

b) $B' = (B'_t)_{t\geq 0}$ mit $B'_t := c^{-\frac{1}{2}} B_{c\cdot t}$ ist eine standardisierte Brownsche Bewegung.

c) $(\mu B_t)_t$ ist ein Martingal bzgl. $\mathcal{F}$.

d) $(\mu B_t^2 - \mu t)_t$ ist ein Martingal bzgl. $\mathcal{F}$.

e) $\exp\left(\mu B_t - \frac{\mu^2}{2} t\right)_t$ ist ein Martingal bzgl. $\mathcal{F}$.

Aufgabe 37 (4 Punkte)

Sei $(X_t)_{0\leq t<\infty}$ ein rechtsstetiges Martingal (Supermartingal) bzgl. einer Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Sei τ eine $\mathcal{F}$-Stoppzeit. Zeigen Sie: Es gilt

$$\mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_0 \qquad\qquad (\mathbb{E}X_\tau \leq \mathbb{E}X_0),$$

falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $\tau(\omega) \leq n_0$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$.

(ii) $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$, $\mathbb{E}|X_\tau| < \infty$ und $\mathbb{E}(X_t \mathbb{1}_{\{\tau > n\}}) \to 0$ für $t \to \infty$.

Aufgabe 38 (4 Punkte)

Sei $B = (B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(k)})_t$ eine k-dimensionale Brownsche Bewegung mit unabhängigen Komponenten $(B_t^{(i)})$ und Start in $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ mit $\|x\|_2 < r$ für $r > 0$ (also $(B_t^{(i)} - x_i)$ stBB). Sei

$$\tau_r := \inf\{t > 0 \colon \|B_t\|_2 = r\}$$

die Treffzeit von B mit der Sphäre vom Radius r um den Ursprung. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[\tau_r]$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die analoge Aussage zu Satz 2.13 für gestoppte Martingale in stetiger Zeit verwenden.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-stochastische-prozesse-ws-2016-17`