Übungen zur Vorlesung "Stochastische Prozesse"

Wintersemester 2016/17, Blatt 9

Abgabetermin: 19.12.2016, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.16., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 31 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Abzählbare Produkte polnischer Räume, versehen mit der Produkttopologie, sind polnisch.

b) Der Raum $(\mathcal{C}([0,\infty)), d)$ mit der Metrik $d(f,g) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \frac{d_k(f,g)}{1+d_k(f,g)}$, wobei $d_k(f,g) := \sup_{x\in[0,k]} |f(x)-g(x)|$, ist polnisch.

c) Der Raum $\mathcal{C}_c([0,\infty))$ der stetigen Funktionen auf $[0,\infty)$ mit kompaktem Träger, ausgestattet mit der Supremumsmetrik, ist separabel. Ist er auch vollständig?

d) Jeder abgeschlossene Teilraum eines polnischen Raums ist polnisch.

Aufgabe 32 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Sei μ ein endliches Borelmaß auf einem polnischen Raum $\mathcal{E}$. Dann gibt es für jedes $B \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ mit $K \subset B$ und $\mu(B \setminus K) < \varepsilon$. Insbesondere ist also jedes Borelmaß straff.

Aufgabe 33 (4 Punkte)

Sei $\mathcal{C}([0,1], d_{\sup})$ die Menge der stetigen Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$ versehen mit der Supremumsmetrik. Zeigen Sie:

a) Die endlich-dimensionalen Projektionen $\pi_{t_1,\ldots,t_k} \colon \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}^k$ mit $f \mapsto (f(t_1,)\ldots,f(t_k))$ sind stetig und somit messbar.

b) Sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dann gilt $\mathcal{B}(\mathcal{C}[0,1]) = \mathcal{B}^{[0,1]} \cap \mathcal{C}([0,1])$.

Aufgabe 34 (4 Punkte)

Sei $(\Omega,\mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \sigma(\mathcal{B}\cup\{A\}))$ für $A \subset \mathbb{R}$ mit $A \notin \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$. Es bezeichne $\mathbb{E}_a$ den Erwartungswertoperator bzgl. des Einpunktmaßes ε_a. Zeigen Sie:

a) Es gilt $\mathcal{A} = \{(A\cap T_1)\cup(A^c\cap T_2) | T_i \in \mathcal{B}\}$.

b) Für $T_i \in \mathcal{B}$ gilt $\mathbb{1}_{T_1} = \mathbb{E}_a\left[\mathbb{1}_{\{(A\cap T_1)\cup(A^c\cap T_2)\}} | \mathcal{B}\right] = \varepsilon_a((A\cap T_1)\cup(A^c\cap T_2))|\mathcal{B})$ ε_a-fast sicher f.a. $a \in A$.

c) Für jedes $a \in A$ existiert ein Markovkern $K_a \colon \Omega\times\mathcal{A} \to \mathbb{R}$, sodass $K_a(\cdot,S) = \varepsilon_a(S|\mathcal{B})$ ist für alle $S \in \mathcal{A}$.

d) Es existiert kein Markovkern $K\colon \Omega\times\mathcal{A}\to\mathbb{R}$, sodass $K(\cdot,S) = \varepsilon_a(S|\mathcal{B})$ ist für alle $a \in A$ und alle $S \in \mathcal{A}$. Ist $(\Omega,\mathcal{A})$ ein polnischer Raum?

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-stochastische-prozesse-ws-2016-17`