Übungen zur Vorlesung
“Stochastische Prozesse“

Wintersemester 2016/17, Blatt 8

Abgabetermin: 12.12.2016, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.16., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 27 (4 Punkte)

Sei $(X_t, \mathcal{F}_t)_{0\le t<\infty}$ ein Martingal oder nicht-negatives Submartingal (jeweils) mit càdlàg-Pfaden, d.h. mit Pfaden, die rechtsseitig stetig sind und deren linksseitige Limiten existieren. Seien $\lambda, T > 0$ reelle Zahlen. Zeigen Sie:

a) $\lambda \cdot \mathbb{P}(\sup_{0\le t\le T} |X_t| \ge \lambda) \le \mathbb{E}|X_T|$

b) Falls $p > 1$ und $\mathbb{E}(X_T^p) < \infty$ gilt $\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T} |X_t|\right)^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}|X_T|^p$.

Hinweis: Die Definition eines Martingals $(X_t)_t$ bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$ in stetiger Zeit wurde in Aufgabe 26 gegeben. Ein Sub- bzw. Supermartingal in stetiger Zeit ist ein Martingal in stetiger Zeit mit der Sub- bzw. Supermartingaleigenschaft $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) \ge (\le) M_s$ für alle $0 \le s \le t$ anstelle der Martingaleigenschaft.

Aufgabe 28 (4 Punkte)

Sei $N = (N_t)_{0\le t<\infty}$ ein Poisson-Prozess mit Intensität λ .

a) Folgern Sie aus Aufgabe 27a) das schwache Gesetz der großen Zahlen für Poisson-Prozesse, also $\frac{N_t}{t} \to \lambda$ in Wahrscheinlichkeit für $t \to \infty$.

b) Folgern Sie aus Aufgabe 27b) das starke Gesetz der großen Zahlen für Poisson-Prozesse, also $\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda$ $\mathbb{P}$-fast sicher.

Aufgabe 29 (4 Punkte)

Sei $(X_t)_{t\ge 0}$ ein Zählprozess, d.h. ein stochastischer Prozess der Form $X_t = \sum_{n\ge 1} \mathbb{1}_{\{T_n \le t\}}$ für endliche Zufallsvariablen $0 < T_1, \le T_2 \le T_3 \le \dots$.
Zeigen Sie: Wenn X unabhängige und stationäre Zuwächse besitzt, dann ist X ein Poisson-Prozess, d.h. es gilt zusätzlich, dass ein $\lambda > 0$ derart existiert, dass $X_t - X_s$ für alle $s < t$ poissonverteilt mit Parameter $\lambda(t-s)$ ist.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis folgendes Resultat verwenden: Sei $Y = (Y_t)_{t\ge 0}$ ein stochastischer Prozess mit unabhängigen und stationären Zuwächsen und rechtsseitig stetigen Pfaden. Sei $(F_t)_{t\ge 0}$ mit $\mathcal{F}_s := \sigma(X_u : 0 \le u \le s)$ die kanonische Filtration. Sei S eine beliebige Stoppzeit bzgl. $(F_t)_{t\ge 0}$. Dann sind $\sigma(X_{t+S} - X_S : t \ge 0)$ und $\sigma(X_{S\wedge t})$ unabhängig.

Aufgabe 30 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Seien $X_i \sim Exp(\lambda)$ iid exponential-verteilte Zufallsvariablen zum Parameter $\lambda > 0$ für $1 \le i \le n$. Dann ist $\sum_{i=1}^n X_i \sim \gamma(n, \lambda)$, wobei $\gamma(p, b)$ die Gamma-Verteilung zu den Parametern p und b ist, gegeben durch die Dichte

$$f(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx} \cdot \mathbb{1}_{\{x>0\}}(x) \,,$$

wobei Γ die Gamma-Funktion ist.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-stochastische-prozesse-ws-2016-17