Übungen zur Vorlesung
“Stochastische Prozesse“

Wintersemester 2016/17, Blatt 7

Abgabetermin: 05.12.2016, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.16., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 23 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ eine Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(T_t)_{t\geq 0}$ eine messbare Halbgruppe von Transformationen auf Ω, d.h. es gilt $T_t\colon \Omega \to \Omega$ f.a. $t \geq 0$, $T_{s+t} = T_s T_t$ f.a. $s, t, \geq 0$ und $(\omega, t) \mapsto T_t\omega$ ist Produkt-messbar von $\Omega \times \mathbb{R}_+$ nach Ω. Sei $\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{A}\colon \mathbb{P}(T_t^{-1} A \triangle A) = 0 \text{ f.a. } t\}$. Sei ξ eine Zufallsvariable auf Ω, die (T_t)-stationär ist, d.h. es gilt $\xi \circ T_t \overset{d}{=} \xi$ f.a. $t \geq 0$.

Zeigen Sie: Für eine messbare Funktion $f\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit $f(\xi) \in L^p$ für ein $p \geq 1$ gilt

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(\xi \circ T_s)\, \mathrm{d}s \xrightarrow{t\to\infty} \mathbb{E}[f(\xi)|\mathcal{I}] \text{ f.s. und in } L^p\,.$$

Aufgabe 24 (4 Punkte)

Sei F eine n-dimensionale Verteilungsfunktion und seien $V_1, \dots, V_n$ iid $U(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen. Dann definiere rekursiv

$$Y_1 := F_1^{-1}(V_1)\,,\ Y_k := F_{k|1,\dots,k-1}^{-1}(V_k|Y_1, \dots, Y_{k-1})\,,\ 2 \leq k \leq n\,,$$

wobei $F_{k|1,\dots,k-1}$ die bedingte Verteilungsfunktion von der k-ten Komponente gegeben der ersten $k-1$ Komponenten bezeichne.
Zeigen Sie: Der Vektor $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ hat Verteilungsfunktion F.

Aufgabe 25 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Zu jeder einseitig stationären Folge $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gibt es eine beidseitig stationäre Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, sodass P^X und $P^{(Y_0,Y_1,\dots)}$ identisch sind.

b) Unter der Eigeschaft in a) gilt: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist genau dann ergodisch, wenn $(Y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ergodisch ist.

Aufgabe 26 (4 Punkte)

Seien $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(Y_t)_{t\geq 0}$ zwei unabhängige Poisson-Prozesse zu den Parametern $\lambda > 0$ und $\mu > 0$. Zeigen Sie:

a) $(X_t + Y_t)_{t\geq 0}$ ist ein Poisson-Prozess zum Parameter $\lambda + \mu$.

b) $(X_t - \lambda t)_{t\geq 0}$ ist ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0} = \sigma(X_s\colon 0 \leq s \leq t)$.

Hinweis: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ eine aufsteigende Folge von σ-Algebren mit $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ für alle $t \geq 0$. Ein Martingal $(M_t)_{t\in\mathbb{R}\geq 0}$ in stetiger Zeit bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ist eine Familie von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit den Eigenschaften, dass $\mathbb{E}|M_t| < \infty$ für alle $t \geq 0$, M_t ist $\mathcal{F}_t$-messbar für alle $t \geq 0$, und $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$ für alle $0 \leq s \leq t$.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-stochastische-prozesse-ws-2016-17`