Übungen zur Vorlesung
“Stochastische Prozesse“

Wintersemester 2016/17, Blatt 6

Abgabetermin: 28.11.2016, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.16., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 19 (4 Punkte)

Geben Sie jeweils eine nicht-triviale stationäre Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und das zugehörige dynamische System $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$ an, sodass

a) (X_n) ergodisch ist,

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} X_i$ keine fast sicher konstante Zufallsvariable ist, bzw.

c) (X_n) nicht ergodisch und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} X_i = c$ fast sicher für ein $c \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 20 (4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe von maßerhaltenden messbaren Abbildungen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{A}_0 := \{A \in \mathcal{A} \colon g(A) = A \text{ für alle } g \in G\}$. Zeigen Sie: Für jedes $X \in L^1(\mathbb{P})$ gilt

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{A}_0) = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G} X \circ g\,.$$

Aufgabe 21 (4 Punkte)

Sei $T \colon \Omega \to \Omega$ eine maßerhaltende Transformation auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, und sei $E \subset \Omega$ messbar. Zeigen Sie: Fast jeder Punkt $\omega \in E$ kehrt unendlich oft nach E zurück. Das heißt, es existiert eine messbare Menge $F \subset E$ mit $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E)$ mit der Eigenschaft, dass für alle $\omega \in F$ eine aufsteigende Folge $(n_i)_i \subset \mathbb{N}$ existiert mit $T^{n_i}\omega \in E$ für alle $i \geq 1$.

Aufgabe 22 (4 Punkte)

a) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein reeller ergodischer Prozess mit $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ f.a. n . Sei $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $S_n \to \infty$ f.s. für $n \to \infty$.

(ii) $\mathbb{P}(S_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty) > 0$.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}[X_1] > 0$ fast sicher.

b) Folgern Sie aus (a): Für eine iid Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\mathbb{E}X_1 = 0$ und $\mathbb{P}(X_1 = 0) < 1$ gilt $\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty$ und $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$ fast sicher.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-stochastische-prozesse-ws-2016-17`