Übungen zur Vorlesung
“Stochastische Prozesse“

Wintersemester 2016/17, Blatt 5

Abgabetermin: 21.11.2016, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.16., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 15 (4 Punkte)

a) Sei Y eine relle Zufallsvariable mit $\mathbb{E}|Y| < \infty$, $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration und $X_n := \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n)$. Weiter sei $\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n\right)$. Zeigen Sie, dass die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher und in L^1 gegen $\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_\infty)$ konvergiert.
b) Folgern Sie aus (a) das 0-1-Gesetz von Kolmogorov, nämlich: Sei $(X_n)_n$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen und $\mathcal{T} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma(X_k \colon k \geq n)$ die σ-Algebra der terminalen Ereignisse. Dann gilt für alle $A \in \mathcal{T}$, dass $P(A) \in \{0,1\}$.

Aufgabe 16 (4 Punkte)

Sei $r \in \mathbb{N}$, $\psi \colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ eine symmetrische, Borel-messbare Funktion und sei $(X_i)_{i=1}^\infty$ eine Folge von iid Zufallsvariablen, sodass $\mathbb{E}|\psi(X_1, \ldots, X_r)| < \infty$. Dann wird

$$U_n := \binom{n}{r}^{-1} \sum_{\{i_1,\ldots,i_r\}\in B_{r,n}} \psi(X_{i_1}, \ldots, X_{i_r})$$

U-Statistik genannt, wobei $B_{r,n}$ die Menge der r-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ bezeichne.

a) Zeigen Sie: $(U_n)_{n\geq r}$ ist ein Rückwärtsmartingal bzgl. $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_n)_{n\geq r}$, wobei

$$\mathcal{F}_n := \sigma\left((X_{1:n}, \ldots, X_{n:n}), X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots\right).$$

b) Beweisen Sie, dass (U_n) in L^1 konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Hinweis: (1) In diesem Zusammenhang heißt eine Funktion $\psi \colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ symmetrisch, falls $\psi(x_1, \ldots, x_r) = \psi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)})$ für alle Permutationen σ auf $\{1, \ldots, r\}$ gilt.

(2) Für reellwertige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ sind $X_{1:n}, \ldots, X_{n:n}$ die der Größe nach geordneten Beobachtungen, d.h. $X_{1:n} \leq \ldots \leq X_{n:n}$.

(3) Für die Konvergenz in (b) dürfen Sie das 0-1-Gesetz von Hewitt-Savage verwenden.

Aufgabe 17 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P, T)$ ein dynamisches System. Sei $\mathcal{I}$ das Mengensystem der T-invarianten Mengen. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{I}$ ist eine σ-Algebra.

b) $f \colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ist genau dann $\mathcal{I}$-messbar, wenn $f \circ T = f$ P-fast sicher.

c) $\mathcal{I}$ ist genau dann P-trivial, wenn jede invariante Funktion $f \colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ (also $f \circ T = f$) fast sicher konstant ist.

d) Für jede invariante Menge $A \in \mathcal{I}$ gilt: $\exists A^*$ mit $T^{-1}(A^*) = A^*$ und $P(A \triangle A^*) = 0$.

(bitte wenden)

Aufgabe 18 (4 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $T\colon X \to X$ eine maßerhaltende Transformation. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) T ist ergodisch.

b) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} P(T^{-j}(A) \cap B) = P(A)P(B)$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$.

c) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} P(T^{-j}(A) \cap A) = P(A)^2$ für alle $A \in \mathcal{A}$.