Übungen zur Vorlesung
"Stochastische Prozesse"

Wintersemester 2016/17, Blatt 4

Abgabetermin: 14.11.2016, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.16., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 11 (4 Punkte)

Sei (X_n) adaptiert an $(\mathcal{F}_n)$, und sei $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) Es existiert ein Martingal (Y_n) bzgl. $(\mathcal{F}_n)$ und eine bzgl. $(\mathcal{F}_n)$ vorhersagbare Folge (A_n) mit $A_0 = 0$, sodass $X_n = Y_n + A_n$ für alle n.

b) (Y_n) und (A_n) in a) sind P-f.s. eindeutig bestimmt.

c) Ist (X_n) ein Submartingal, dann ist (A_n) wachsend. Ist (X_n) ein Supermartingal, dann ist (A_n) fallend.

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen in L^2. Weiter sei T eine fast sicher beschränkte Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$ und unabhängig von (X_n). Es gelte $\mathbb{E}X_i = \mu$ und $\operatorname{Var} X_i = \sigma^2$ für alle $i \geq 1$. Sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Var}(S_T) = \sigma^2 \mathbb{E}T + \mu^2 \operatorname{Var} T.$$

Hinweis: Betrachten Sie $(M_n^2 - n\sigma^2)$ für $M_n := S_n - n\mu$.

Aufgabe 13 (2 Punkte)

Zeigen Sie: Sei (X_n) eine Folge von Zufallsvariablen mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(G(|X_n|)) < \infty$ für eine nicht-negative, monoton wachsende Funktion G mit $\lim_{t\to\infty} \frac{G(t)}{t} = \infty$, so ist (X_n) gleichgradig integrierbar.

Aufgabe 14 (6 Punkte)

Sei $(X_{n,k})$ eine Folge von iid Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$, $Z_{n+1} := \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$, $Z_0 := 1$, $\mu = \mathbb{E}X_{n,i} \in (0,\infty)$ und $\mathcal{F}_n := \sigma(Z_1, \dots, Z_n)$. Sei zusätzlich $\operatorname{Var}(X_{n,i}) = \sigma^2 \in (0,\infty)$. Sei $W_n := \frac{Z_n}{\mu^n}$.

a) Für welche $\mu \in \mathbb{R}_+$ konvergiert der Prozess (W_n) fast sicher?

b) Für welche $\mu \in \mathbb{R}_+$ ist (W_n) abschließbar?

c) Bestimmen Sie $\mathbb{E}W_\infty$ für $\mu > 1$.

d) Für welche $\mu \in \mathbb{R}_+$ konvergiert der Prozess (Z_n) fast sicher? Geben Sie im Falle von Konvergenz die Grenzwerte an.

Hinweis: Schätzen Sie $\operatorname{Var}(W_n)$ ab, indem Sie die Aussage aus Aufgabe 12 benutzen, die auch für fast sicher endliche Stoppzeiten gilt.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-stochastische-prozesse-ws-2016-17`