Übungen zur Vorlesung
“Stochastische Prozesse“

Wintersemester 2016/17, Blatt 3

Abgabetermin: 07.11.2016, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.16., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 7 (4 Punkte)

a) Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vorhersagbar bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $|c_n| \leq k_n$ für alle n und für eine Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Martingaltransformation von (X_n) bzgl. (c_n) ein Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)$ ist.

b) Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Super-/Submartingal und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vorhersagbar bzgl. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $0 \leq c_n \leq k_n$ für alle n und für eine Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass dann auch $Y_n = \sum_{k=1}^n c_k(X_k - X_{k-1})$ ein Super/-Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)$ ist.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Sei $(\xi_n)_n$ iid Folge mit $\xi_n \in \{-1, 1\}$ und $\mathbb{E}\xi_n = 0$ f.a. n, $X_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$, $c_1 := 1$, und für $n \geq 2$ sei $c_n := \begin{cases} 2c_{n-1}\,, & \text{falls } \xi_{n-1} = -1\,, \\ 1\,, & \text{falls } \xi_{n-1} = 1\,. \end{cases}$ Weiter sei $Y_n := \sum_{k=1}^n c_k(X_k - X_{k-1})$, $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} \,|\xi_n = 1\}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}Y_{\tau-1} = -\infty\,.$$

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Seien ξ_i iid mit $P(\xi_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$, $X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\tau := \min\{n\colon |X_n| = k\}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}\tau = \mathbb{E}X_\tau^2 = k^2\,.$$

Hinweis: Zeigen Sie: Es existiert $a > 0$, sodass $P(\tau > n) \leq a \cdot (1-p)^{\frac{n}{2k}}$ für $p = 2^{-2k}$, indem Sie Pfade der Länge $2k$ betrachten mit $\xi_i = 1$ für $i \in [j, j+2k-1]$.

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Sei $(X_n)_n$ ein Martingal oder nicht-negatives Submartingal bzgl. $(\mathcal{F}_n)_n$. Sei $X_n^* := \max_{0\leq j\leq n} |X_j|$ und $\|\cdot\|_p := (\mathbb{E}|\cdot|^p)^{1/p}$ für $p > 1$. Zeigen Sie, dass

$$\|X_n^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \cdot \|X_n\|_p\,.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst für eine Zufallsvariable $Y \geq 0$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$, dass folgende Integrationsformel gilt:

$$\mathbb{E}Y^r = r\int_0^\infty t^{r-1} P(\{Y \geq t\})\,\mathrm{d}t\,.$$

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-stochastische-prozesse-ws-2016-17`