Übungen zur Vorlesung
“Stochastische Prozesse“

Wintersemester 2016/17, Blatt 2

Abgabetermin: 01.11.2016, bis 12:00 Uhr in Fach Nr. 3.16., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $(X_1, X_2) \sim N(\mu, \Sigma)$ bivariat normalverteilt mit $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ und $\Sigma = \left(\begin{smallmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\varrho \\ \sigma_1\sigma_2\varrho & \sigma_2^2 \end{smallmatrix}\right)$ mit $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ und $\varrho \in [-1, 1]$. Zeigen Sie, dass

$$P_\varrho^{X_1|X_2=x_2} \sim N\left(\mu_1 + \varrho\sigma_1 \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}, \sigma_1^2(1-\varrho^2)\right) .$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $\{X_i\}_{1\le i\le n}$ iid, reelle Zufallsvariablen mit Lebesgue-Dichte, und sei F die Verteilungsfunktion von X_1. Sei $X_{\min} := \min_i\{X_i\}$ und $X_{\max} = \max_i\{X_i\}$. Zeigen Sie:

$$P(X_{\min} \le y \mid X_{\max} = z) = \begin{cases} 1 - \frac{(F(z)-F(y))^{n-1}}{F(z)^{n-1}} & \text{, falls } y < z\,, \\ 1 & \text{, falls } y \ge z\,. \end{cases}$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass

$$P(X_{\min} \le y, X_{\max} \le z) = \begin{cases} F(z)^n - (F(z) - F(y))^n & \text{, falls } y < z\,, \\ F(z)^n & \text{, falls } y \ge z\,. \end{cases}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

a) $\varepsilon > 0 \implies P(|X| \ge \varepsilon|\mathcal{F}) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}(X^2|\mathcal{F})$ P-f.s.

b) φ konvex, $\mathbb{E}|\varphi(X)| < \infty \implies \varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})) \le \mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{F})$ P-f.s.

c) $\mathbb{E}X^2 < \infty, \mathbb{E}Y^2 < \infty \implies \mathbb{E}(XY|\mathcal{F})^2 \le \mathbb{E}(X^2|\mathcal{F}) \cdot \mathbb{E}(Y^2|\mathcal{F})$ P-f.s.

d) $X_n \ge 0\,, X_n \uparrow X\,, \mathbb{E}X < \infty \implies \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}) \to \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ P-f.s.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für unabhängige, auf $[0, 1]$ uniform-verteilte Zufallsvariablen X, Y gilt, dass

$$\mathbf{E}[X \mid \max(X, Y)] = \tfrac{3}{4}\max(X, Y).$$

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-stochastische-prozesse-ws-2016-17`