

Übungen zur Vorlesung “Mathematische Statistik“

Wintersemester 2016/17, Blatt 1

Abgabetermin: 24.10.2016, bis 12:00Uhr in Fach Nr. 3.16., UG Eckerstr. 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Seien $X: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k)$ und $Y: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^l, \mathcal{B}^l)$ Zufallsvariablen. Sei $f: (\mathbb{R}^{k+l}, \mathcal{B}^{k+l}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ integrierbar bzgl. der gemeinsamen Verteilung von (X, Y) . Zeigen Sie, dass dann für P^Y -fast alle y die Funktion $g_y = f(\cdot, y)$ integrierbar bzgl. $P^{X|Y=y}$ ist und $h(y) = \int f(x, y) dP^{X|Y=y}(x)$ integrierbar bzgl. P^Y ist, und dass außerdem

$$\int f(x, y) dP^{(X,Y)}(x, y) = \int \int f(x, y) dP^{X|Y=y}(x) dP^Y(y)$$

gilt.

Aufgabe 2

(4 Punkte)

Seien $X: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k)$ und $Y: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^l, \mathcal{B}^l)$ Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion $F_{X,Y}$. Seien μ_1 und μ_2 Maße auf \mathcal{B}^k bzw. \mathcal{B}^l . Zeigen Sie: Besitzt $P^{(X,Y)}$ eine Dichte $f_{X,Y}$ bzgl. dem Produktmaß $\mu_1 \otimes \mu_2$ auf $\mathcal{B}^k \otimes \mathcal{B}^l$, dann gilt

- $f_Y(y) := \int_{\mathbb{R}^k} f_{X,Y}(x, y) d\mu_1(x)$ ist P^Y -Dichte bzgl. μ_2 , und
- $f_{X|Y=y}(x) := \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ ist Dichte der bedingten Verteilung $P^{X|Y=y}$ bzgl. μ_1 für P^Y -fast alle y .
- Ist spezieller $\mu_1 \otimes \mu_2 = \lambda^{k+l}$ das $(k+l)$ -dimensionale Lebesgue-Maß, dann ist $f_{X,Y}(x, y) = \frac{d^{k+l} F_{X,Y}}{dx_1 \dots dx_k dy_1 \dots dy_l}(x, y)$ λ^{k+l} -fast sicher.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:

<https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-stochastische-prozesse-ws-2016-17>