Übungen zur Vorlesung "Stochastik"

Blatt 6

Abgabetermin: 31.01.2017, vor Beginn der Vorlesung
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte geben Sie einzeln ab.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Seien $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise unkorrelierte, quadratintegrierbare Zufallsvariablen mit $\mu_n := \mathrm{E}[X_n]$, $\sigma_n^2 := \mathrm{Var}(X_n)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = 0$.
Zeigen Sie, dass
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$
(Zur Erinnerung: $Y_n \xrightarrow{\mathbf{P}} Y$ bedeutet, dass die Folge $(Y_n)_{n\geq 1}$ stochastisch gegen Y konvergiert.)

b) Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ mit $\mathbf{P}(X_1 = 0) = 1$ und
$$\mathbf{P}(X_n = n) = \mathbf{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n\ln n}, \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\ln n}, \qquad \text{für } n \geq 2.$$
Zeigen Sie mit Hilfe von Teilaufgabe a): (X_n) genügt dem schwachen Gesetz großer Zahlen, d.h.
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mathrm{E}[X_i]) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ein Experiment, bei dem nur ein bestimmtes Ereignis A oder A^c auftreten kann, wird unabhängig so lange wiederholt, bis zum ersten Mal die Konstellation A, A^c auftritt. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der dafür benötigten Versuche, p sei die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A.

a) Zeigen Sie für $p_k := \mathbf{P}(X = k)$ die Rekursionsformel
$$p_k = (1-p)p_{k-1} + p^{k-2}p(1-p) \qquad \text{für } k \geq 2$$
und $p_0 = p_1 := 0$.

b) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion von X und zeigen Sie damit
$$\mathbf{P}^X(\mathbb{N}) = 1 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{E}[X] = \frac{1}{p(1-p)}.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für $p \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ durch

$$f(k) := \binom{n+k-1}{k} p^n (1-p)^k \qquad , k \in \mathbb{N}_0$$

eine Zähldichte auf $\mathbb{N}_0$ definiert wird. Das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß $N\!B(n,p)$ nennt man die *negative Binomialverteilung* zu den Parametern n, p.

b) Verifizieren Sie, dass durch

$$G_X(s) = \left(\frac{p}{1-(1-p)s} \right)^n$$

die erzeugende Funktion einer $N\!B(n,p)$-verteilten Zufallsvariable X gegeben ist und bestimmen Sie mit deren Hilfe den Erwartungswert und die Varianz von X.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Ein fairer Würfel wird zweimal unabhängig geworfen. Die Zufallsvariable X beschreibe das Ergebnis des ersten Wurfes, Y das Ergebnis des zweiten.
Bestimmen Sie für $Z = \max(X,Y)$ und $k \in \{1,2,...,6\}$ den bedingten Erwartungswert von Z unter $Y = k$

$$\mathrm{E}[\max(X,Y)|Y=k].$$