Übungen zur Vorlesung
"Stochastik"

Blatt 5

Abgabetermin: 17.01.2017, vor Beginn der Vorlesung
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte geben Sie einzeln ab.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Ein fairer Würfel wird zweimal unabhängig geworfen. Die Zufallsvariable X beschreibe das Ergebnis des ersten Wurfes, Y das Ergebnis des zweiten. $\mathbf{P}^{(X,Y)}$ ist also die Laplaceverteilung auf $\Omega = \{1, ..., 6\}^2$. Bestimmen Sie für $Z = \max(X, Y)$ den Korrelationskoeffizienten $\rho_{X,Z}$ von X und Z.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $\mathrm{E}[X]$, $\mathrm{E}[X^2]$, $\mathrm{E}[Z]$, $\mathrm{E}[Z^2]$, $\mathrm{Kov}(X, Z)$ und die Standardabweichungen von X und Z.
Sie dürfen die folgenden Formeln (ohne Beweis) verwenden:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien X und Y Zufallsgrößen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. Für alle $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ gelte

$$X(\omega_1) < X(\omega_2) \Rightarrow Y(\omega_1) \leq Y(\omega_2).$$

Zeigen Sie, dass X und Y positiv korreliert sind, d.h. $\mathrm{Kov}(X, Y) \geq 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei f eine stetige Funktion auf $[0, 1]$ mit Werten in $\mathbb{R}$. Sei für $n \geq 1$ das Polynom f_n durch

$$f_n(p) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0 \leq p \leq 1} |f(p) - f_n(p)| = 0$$

gilt.

Hinweis: Verwenden Sie das ϵ-δ-Kriterium für stetige Funktionen mit $|\frac{k}{n} - p| < \delta$.
Für Terme mit $|\frac{k}{n} - p| \geq \delta$ kann die Tschebyschevsche Ungleichung helfen. (Warum?)

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Zufallsvariablen mit $0 < \operatorname{Var}(X_n) \leq c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, für die gilt

$$\rho_{ij} := \frac{\operatorname{Kov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X_i)\operatorname{Var}(X_j)}} \longrightarrow 0 \qquad \text{für } |i-j| \to \infty.$$

Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügt, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(X_i - \mathrm{E}[X_i])\right| > \epsilon\right) = 0 \qquad \forall \epsilon > 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Tschebyschevsche Ungleichung.

Zwei Weihnachtsaufgaben

Aufgabe 5 (4 Bonuspunkte)

30 Kugeln, die entweder die Farbe rot oder die Farbe schwarz haben, werden auf zwei Urnen verteilt, wobei jede Urne mindestens eine schwarze als auch mindestens eine rote Kugel enthält. Zieht man anschließend aus beiden Urnen jeweils eine Kugel, so sind mit einer Wahrscheinlichkeit von 35% beide gezogenen Kugeln rot.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden gezogenen Kugeln stattdessen schwarz sind? Ist die Antwort eindeutig, oder gibt es mehrere Möglichkeiten?

Aufgabe 6 (4 Bonuspunkte)

Zehn Räuber haben gemeinsam einen Safe geknackt und verstauen das gestohlene Geld in einem Versteck in einer großen Truhe.
Die Räuber misstrauen einander. Daher beschließen sie, die Truhe so zu verschließen, dass nur vier beliebige Räuber gemeinsam die Truhe öffnen können. Sind weniger als vier Räuber anwesend, darf sich die Truhe nicht aufschließen lassen.
Wie viele verschiedene Vorhängeschlösser müssen an der Truhe angebracht werden, damit das gelingt? Und wie viele Schlüssel werden benötigt?

Hinweis: Zwei Schlösser sind offenbar zu wenig, weil dann ja nicht ausgeschlossen werden kann, dass zwei zufällig ausgewählte Räuber gemeinsam die beiden erforderlichen Schlüssel besitzen und zu zweit an das Geld kommen.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten

und einen guten Start ins neue Jahr!

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-stochastik-ws-2016-17`