Übungen zur Vorlesung "Stochastik"

Blatt 4

Abgabetermin: 20.12.2016, vor Beginn der Vorlesung
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Bitte geben Sie einzeln ab.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Ein Bekannter bietet Ihnen folgendes Spiel an:
Sie setzen einen gewissen Betrag K€ ein und dürfen dafür eine faire Münze so lange werfen, bis zum ersten Mal „Kopf" fällt. Geschieht dies beim n-ten Mal, so erhalten Sie 2^{n-1}€.

a) Was wäre ein fairer Spieleinsatz? (D.h. welchen Einsatz K müsste Ihr Bekannter von Ihnen verlangen, um „im Mittel" nicht zu verlieren?)

b) Aufgrund der erstaunlichen Antwort aus a) wird das Spiel folgendermaßen abgewandelt: Ihr Höchstgewinn wird auf 2^{20}€ $=$ 1048576€ begrenzt, was angesichts der finanziellen Möglichkeiten Ihres Bekannten gerade noch plausibel ist. Was ist unter diesen Voraussetzungen nun ein fairer Spieleinsatz?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

In einer Urne befinden sich n Kugeln, die mit $1, ..., n$ durchnummeriert sind. Aus der Urne werden zufällig k Kugeln ohne Zurücklegen herausgegriffen. Die Zufallsvariable X beschreibe die größte gezogene Zahl. Bestimmen Sie die Verteilung und den Erwartungswert von X.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Ein Lebensmittelhersteller fügt zu Werbezwecken seinen Müslipackungen jeweils eine von zehn Figuren aus den Asterix-Comics hinzu. Wieviele Packungen müssen Sie im Schnitt kaufen, bis Sie einen kompletten Satz mit zehn verschiedenen gallischen Dorfbewohnern zusammengesammelt haben?

Hinweis: Betrachten Sie $Y_i := X_i - X_{i-1}$, wobei X_i die Anzahl der gekauften Packungen sei, bis Sie i verschiedene Figuren beisammen haben, und begründen Sie, dass Y_i geometrisch verteilt sein muss.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für unabhängige diskrete Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ gilt:

a) Für beliebige Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n$, sind die Zufallsvariablen $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ unabhängig.

b) Für $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind die Zufallvariablen $g(X_1, X_2), X_3, \dots, X_n$ unabhängig.

Die Übungsaufgaben sowie weitere Informationen zur Vorlesung finden Sie auf der Internetseite:
`http://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2016-17/vorlesung-stochastik-ws-2016-17`