Übungen zur Vorlesung "Stochastik"

Blatt 3

Abgabetermin: 06.12.2016, vor Beginn der Vorlesung
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte geben Sie einzeln ab.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Man spiele mit zwei Würfeln und betrachte das Resultat als ein Paar (X, Y) auf einem geeigneten Grundraum Ω. Betrachte die folgenden Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \{X \text{ ist gerade}\} \\ B &= \{X + Y \text{ ist gerade}\} \\ C &= \{Y \text{ ist Primzahl}\} \\ D &= \{10X + Y \text{ ist Primzahl}\}. \end{aligned}$$

Welche Paare von Ereignissen sind unabhängig? Welche Tripel sind unabhängig? Sind alle vier Ereignisse untereinander unabhängig?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien r rote uns s schwarze Kugeln in einer Urne. Es werden n Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Man zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die i-te gezogene Kugel schwarz ist, gegeben ist durch $\frac{s}{r+s}$ für $i = 1, ..., n$, falls $n \leq r + s$ ist.

Folgern Sie daraus, dass das Streichholzziehen ein faires Losverfahren ist, d.h. die Reihenfolge, in der die Teilnehmer zum Ziehen antreten, hat keinen Einfluss auf die Chance, das höhere Streichholz zu ziehen.
(Dabei ziehen n Personen nacheinander zufällig und ohne Zurücklegen jeweils eines aus n Streichhölzern, von denen eines kürzer ist als die anderen. Wer das kürzere zieht, ist Sieger bzw. Verlierer.)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und N eine zum Parameter $\lambda > 0$ Poisson-verteilte Zufallsvariable auf Ω. Ferner sei $X = 1_{\{0,2,4,6,\ldots\}} \circ N$.
Mann zeige, dass X eine Bermoulli-verteilte Zufallsvariable auf Ω ist mit

$$P(X = 1) = p = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda}) = 1 - P(X = 0).$$

b) Seien $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{N}$ zwei stochastisch unabhängige, zum Parameter $p \in (0, 1)$ geometrisch verteilte Zufallsvariablen.
Bestimmen Sie für beliebiges, aber festes $k \geq 2$ die bedingte Verteilung von X_1 gegeben $X_1 + X_2 = k$, d.h. berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_1 = l | X_1 + X_2 = k), \quad 1 \leq l \leq k - 1.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und X_1, X_2 zwei unabhängige Zufallsvariablen auf Ω. Man zeige:

a) Sind die X_i Poisson-verteilt zu den Parametern $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, so ist deren Summe $Y = X_1 + X_2$ Poisson-verteilt zum Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$.

b) Sind die X_i Poisson-verteilt zu den Parametern $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, so ist X_1 gegeben $X_1 + X_2 = l$ binomialverteilt zu den Parametern $n = l$ und $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$, d.h.

$$P(X_1 = k | X_1 + X_2 = l) = \binom{l}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{l-k}$$

für $k = 0, 1, ..., l$.