Übungen zur Vorlesung "Stochastik"

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe 1

Die Ziffern 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 werden in zufälliger Reihenfolge aufgeschrieben. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die so gebildete 7-stellige Zahl durch

a) 2 b) 3 c) 4

teilbar ist.

Aufgabe 2

Ein fairer 6-seitiger Würfel wird n-mal geworfen, $n \geq 1$.

a) Geben Sie den Grundraum Ω und die Verteilung P auf Ω an.

b) Stellen Sie die folgenden Ereignisse als Teilmengen von Ω dar:
A : Die Augenzahl beim ersten Wurf ist gerade.
B : Die Augenzahlen aller Würfe sind ungerade.
C : Die Summe aller Augenzahlen ist ungerade.
D : Beim ersten und beim n-ten Wurf beträgt die Augenzahl 1 .

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die in b) angegebenen Ereignisse.

Aufgabe 3

Bei einer Spielshow kann der Sieger eine von drei geschlossenen Türen auswählen. Nur eine Wahl führt zum Hauptgewinn; hinter den beiden anderen befindet sich jeweils ein Trostpreis. Der Sieger muss sich zunächst für eine Tür entscheiden. Danach zeigt der Showmaster auf eine der beiden anderen Türen mit dem Hinweis, dass diese Tür nur zu einem Trostpreis führe. Der Sieger erhält nun die Möglichkeit, sich neu zu entscheiden. Wie und um wieviel kann er durch die Zusatzinformation des Showmasters seine Chancen auf den Hauptgewinn erhöhen?

Aufgabe 4

Bei Sportwetten werden nicht die Gewinnverhältnisse angegeben, sondern die Auszahlungsverhältnisse, auch einfach Quoten genannt. Das Auszahlungsverhältnis gibt die Auszahlung im Verhältnis zum Einsatz an. Für das Bundesliga-Spiel des SC Freiburg gegen den Werder Bremen gibt der Wettanbieter *bwin* folgende Quoten an:

Sieg Freiburg:	2.75 : 1
Unentschieden:	3.40 : 1
Sieg Werder Bremen:	2.45 : 1

a) Welche Siegeswahrscheinlichkeit von Freiburg ergibt sich wenn man annimmt, dass die Wette fair ist?

Hinweis: Sei E ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit p und Gewinn G. Handelt es sich um ein faires Spiel, so muss für den mittleren Gewinn bei einem Einsatz von 1 gelten, dass

$$MG = G \cdot p - 1 \cdot (1 - p) = 0.$$

b) Berechnen Sie die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten für die drei Ereignisse, welche sich aus diesen Wettquoten ergeben, indem Sie beachten, dass die obigen Quoten nicht fair sind.

Aufgabe 5

In der Vorlesung haben Sie die *Stetigkeit von unten* kennengelernt.
Die Definition lautete:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$$

für jede Folge $(A_i)_{i\geq 1}$ in $\mathcal{A}$ mit $A_1 \subset A_2 \subset \dots$.
Zeigen Sie nun, dass die *Stetigkeit von unten* äquivalent ist zur *Stetigkeit von oben*, d.h.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$$

für jede Folge $(A_i)_{i\geq 1}$ in $\mathcal{A}$ mit $A_1 \supset A_2 \supset \dots$.