Kombinatorik kompakt

Übersicht

Auswahl/Kombinationen von N aus m Elementen

Statistische Physik	**unterscheidbare Objekte**	**ununterscheidbare (gleiche) Objekte**	
ohne Pauliprinzip	m^N „Maxwell-Boltzmann“	$\binom{m+N-1}{N}$ „Bose-Einstein“	mit Zurücklegen
mit Pauliprinzip	$\frac{m!}{(m-N)!}$	$\binom{m}{N}$ „Fermi-Dirac“	ohne Zurücklegen
	geordnete Stichproben	**ungeordnete Stichproben**	**Ziehen aus einer Urne**

Modelle mit Anordnung/Reihenfolge

Anordnungen der Länge N aus m Elementen mit Wiederholungen

$A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ sei endliche Menge mit unterscheidbaren Objekten

$\Omega := \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N) \,|\, \omega_i \in A, 1 \leq i \leq N\} = A^N \quad \Longrightarrow |\Omega| = m^N$
(karthesisches Produkt)

Anwendungen:

a) Ziehen mit Zurücklegen und Beachtung der Reihenfolge aus einer Urne mit m unterscheidbaren Kugeln

b) N-maliges Würfeln ($A = \{1, 2, \ldots, 6\}$)

c) Belegung von Zellen/Schachteln mit unterscheidbaren Objekten
Beispiel: Für N verschiedene Elementarteilchen stehen m verschiedene Energiezustände zur Auswahl. Belegung der Energiezustände wird beschrieben durch $(\omega_1, \ldots, \omega_N)$, wobei ω_i den Energiezustand von Teilchen i angibt (mehrere Teilchen können denselben Energiezustand haben, Modell ohne Pauli-Prinzip)

Verallgemeinerung: N verschiedene Mengen A_i

$$\Omega := \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \,|\, \omega_i \in A_i,\, 1 \le i \le N\}, \quad |\Omega| = \prod_{i=1}^{N} |A_i|$$

Anordnungen der Länge N aus m Elementen ohne Wiederholungen ($N \le m$)

$A = \{a_1, \dots, a_m\}$ sei endliche Menge mit unterscheidbaren Objekten

$$\Omega := \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \,|\, \omega_i \in A \text{ und } \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\}$$

$$\Longrightarrow |\Omega| = \prod_{i=1}^{N} (m - i + 1) = \frac{m!}{(m-N)!}$$

Anwendung: Ziehen ohne Zurücklegen und Beachtung der Reihenfolge aus einer Urne mit m unterscheidbaren Kugeln

Spezialfall: Permutation, $N = m$:
$\Omega := \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \,|\, \omega_i \in A,\, \omega_i \neq \omega_j\} \quad \Longrightarrow |\Omega| = m!$
Nach Obigem muss ferner $|\Omega| = m! = \frac{m!}{0!}$ sein, d.h. man setzt $0! := 1$.

Modelle ohne Anordnung/Reihenfolge

Kombinationen der Größe N aus m Elementen ohne Wiederholungen

Beispiel: Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge aus einer Urne mit m unterscheidbaren Kugeln

Satz 1

Sei $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ eine endliche Menge unterscheidbarer Objekte. Dann gibt es

$$\frac{m!}{N!(m-N)!} =: \binom{m}{N}$$

verschiedene N-elementige Teilmengen von A ($N \leq m$). Man bezeichnet die (ungeordneten) Teilmengen als Kombinationen (ohne Wiederholungen) der Größe N aus m Elementen.

Beweis: Wählt man nacheinander N Elemente aus A unter Berücksichtigung der Reihenfolge aus, erhält man als mögliche Ergebnisse die Menge

$$\Omega := \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in A^N \,|\, \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\}$$

mit $|\Omega| = \frac{m!}{(m-N)!}$. Da es auf die Reihenfolge/Ordnung *nicht* ankommen soll, sind sämtliche möglichen Anordnungen/Permutationen derselben N gezogenen Objekte als äquivalent anzusehen.

Für ein N-Tupel $(\omega_1, \dots, \omega_N)$ gibt es $N!$ verschiedene Anordnungen. Zusammenfassung aller Tupel, die die gleichen Objekte in unterschiedlicher Anordnung enthalten („Äquivalenzklassen“), ergibt $\frac{|\Omega|}{N!} = \frac{m!}{N!(m-N)!}$.

Für jede Äquivalenzklasse kann man einen *Repräsentanten*, d.h. ein Tupel mit spezieller Anordnung, auswählen, z.B. mit aufsteigender Reihenfolge (sofern auf A eine Ordnungsrelation existiert). Damit lässt sich die Menge Ω_N der N-elementigen Teilmengen von A darstellen als

$$\Omega_N = \{\omega \in A^N \,|\, \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N\},\ |\Omega_N| = \frac{m!}{N!(m-N)!} = \binom{m}{N}. \square$$

Bemerkung: Die Zahlen $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \leq k \leq n$, heißen *Binomialkoeffizienten*. Man setzt $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$.

Anwendungen:

a) Zahlenlotto „6 aus 49". Es gibt $\binom{49}{6} = 13983816$ verschiedene mögliche Ziehungsergebnisse.

b) Belegung vom m verschiedenen Energiezuständen durch N Elementarteilchen, wobei jeder Energiezustand nur von höchstens einem Teilchen angenommen werden darf (Pauli-Prinzip, gilt z.B. für Elektronen, Protonen und Neutronen).

Bemerkung: Äquivalent zu „unterscheidbare Objekte ohne Anordnung" (d.h. eine Auswahl verschiedener Objekte, bei der es nicht auf die Reihenfolge ankommt) ist, *ununterscheidbare (gleiche) Objekte* zu betrachten, die man mangels charakteristischer Eigenheiten nicht auseinander halten und somit auch nicht anordnen kann.
(Dies ist z.B. bei Anwendung b) oben der Fall.)

Kombinationen der Größe N aus m Elementen mit Wiederholungen

$A = \{a_1, \dots, a_m\}$ sei endliche Menge mit unterscheidbaren Objekten (o.B.d.A. mit Ordnungsrelation)

Analog zum Beweis von Satz 1 lässt sich die Menge $\bar{\Omega}_N$ aller N-elementigen Auswahlen (Ziehungen) aus A mit Wiederholung, aber ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, darstellen als

$$\bar{\Omega}_N = \{\omega \in A^N \,|\, \omega_1 \leq \omega_2 \leq \cdots \leq \omega_N\}$$

($\leq$, da nun Wiederholungen möglich sind). Es gilt $|\bar{\Omega}_N| = \binom{m+N-1}{N}$.

Beweis: O.B.d.A. sei $A = \{1, \dots, m\}$. Definiere ferner $\bar{A} := \{1, \dots, m+N-1\}$ sowie $\mathcal{P}_N(\bar{A}) = \{\bar{B} \subset \bar{A} \,|\, |\bar{B}| = N\}$ und $f : \bar{\Omega}_N \to \mathcal{P}_N(\bar{A})$ durch $(\omega_1, \dots, \omega_N) \mapsto (\omega_1, \omega_2 + 1, \dots, \omega_N + N - 1)$.

Beachte, dass f bijektiv ist (die Injektivität ist trivial)!

f ist surjektiv, denn zu jeder N-elementigen Teilmenge $\bar{B}$ von $\bar{A}$ erhält man ein Urbild aus $\bar{\Omega}_N$, indem man die Elemente von $\bar{B}$ zunächst nach aufsteigender Größe ordnet und dann vom i-ten Glied der geordneten Folge $i-1$ subtrahiert.

Da f bijektiv ist, muss gelten $|\bar{\Omega}_N| = |\mathcal{P}_N(\bar{A})|$.

Da $\bar{A} = \{1, \ldots, m+N-1\}$ $m+N-1$ verschiedene Elemente hat, ist die Anzahl der N-elementigen Teilmengen von $\bar{A}$ nach Satz 1 gerade $\binom{m+N-1}{N}$, d.h. $|\bar{\Omega}_N| = |\mathcal{P}_N(\bar{A})| = \binom{m+N-1}{N}$. $\square$

Korollar 1 (Binomischer Lehrsatz)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \qquad x, y \in \mathbb{R},\ n \geq 1.$$

Beweis: $$(x+y)^n = (x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y) = \sum_{A\subset\{1,\ldots,n\}} x^{|A|}y^{|A^C|}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{A\subset\{1,\ldots,n\}\\ |A|=k}} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad \square$$

Anwendung: Ist $|\Omega| = n$, so gilt $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^n$.

Beweis: Sei $A_k := \{A\subset\Omega \mid |A| = k\}$ die Menge der k-elementigen Teilmengen von Ω für $k = 0, 1, \ldots, n$. Dann gilt

$$|\mathcal{P}(\Omega)| = \sum_{k=0}^{n} |A_k| \overset{\text{Satz 1}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overset{\text{Kor. 3}}{=} (1+1)^n = 2^n.$$

Hypergeometrische und Binomialverteilung

Betrachte Urne mit s schwarzen und w weißen Kugeln, $s + w = n$. Ziehe m Kugeln mit einem Griff heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau $k \leq \min(m, s)$ schwarze Kugeln zu ziehen?

Seien $A = \{1, \ldots, n\}$ die Menge aller Kugeln in der Urne, $A_0 = \{1, \ldots, s\}$ die schwarzen und $A_0^C = \{s + 1, \ldots, n\}$ die weißen Kugeln. Da es nur auf die Anzahlen der gezogenen schwarzen bzw. weißen Kugeln ankommt, aber nicht auf deren Reihenfolge innerhalb der Ziehung, liegt eine Ziehung ohne Anordnung und Wiederholung vor bzw. eine Kombination von m aus n Elementen ohne Wiederholung.

$$\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_m) \,|\, \omega_i \in A,\, \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_m\}, \quad |\Omega| = \binom{n}{m}.$$

$$\begin{aligned} E &:= \text{„genau } k \text{ schwarze unter den } m \text{ gezogenen Kugeln“} \\ &= \{\omega \in \Omega \,|\, \omega_i \in A_0,\, 1 \leq i \leq k,\, \omega_i \in A_0^C,\, i > k\} \end{aligned}$$

Betrachte

$$\Omega' := \{\omega' = (\omega'_1, \dots, \omega'_k) \,|\, \omega'_i \in A_0,\, \omega'_1 < \dots < \omega'_k\}, \quad |\Omega'| = \binom{s}{k},$$

$$\Omega'' := \{\omega'' = (\omega''_1, \dots, \omega''_{m-k}) \,|\, \omega''_i \in A_0^C,\, \omega''_1 < \dots < \omega''_{m-k}\}, \quad |\Omega'| = \binom{w}{m-k}.$$

Definiere

$$\varphi : E \to \Omega' \times \Omega'',\ \varphi((\omega_1, \dots, \omega_m)) = \big((\omega_1, \dots, \omega_k), (\omega_{k+1}, \dots, \omega_m)\big)$$

Offensichtlich ist φ bijektiv, daher gilt $|E| = |\Omega'| \cdot |\Omega''| = \binom{s}{k}\binom{w}{m-k}$.

Unter der Laplace-Annahme gilt

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\binom{s}{k}\binom{w}{m-k}}{\binom{n}{m}}.$$

Definition 2

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung P auf $\{\max(0, m-w), \ldots, \min(m, s)\}$, gegeben durch

$$P(\{k\}) = \frac{\binom{s}{k}\binom{w}{m-k}}{\binom{n}{m}} = \frac{\binom{s}{k}\binom{n-s}{m-k}}{\binom{n}{m}},$$

heißt **hypergeometrische Verteilung** *zu den Parametern n, s und m.*

Bemerkung: Die Verteilung ist auch auf der u.U. größeren Menge $\{0, \ldots, m\}$ definiert, da für $k < m-w$ und $k > s$ jeweils ein Binomialkoeffizient im Zähler 0 wird.

Anwendungen:

a) Lotto „6 aus 49“: $n = 49$ Kugeln, $s = 6$ schwarze (Richtige, d.h. zuvor getippte Zahlen), $m = 6$ Kugeln werden gezogen, $k = 0, 1, \ldots, 6$. p_k ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau k der getippten Zahlen gezogen werden: $p_k = \frac{\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$

k	0	1	2	3	4	5	6
p_k	0.4359	0.4130	0.1324	0.01765	$0.9686 \cdot 10^{-3}$	$0.1845 \cdot 10^{-4}$	$0.715 \cdot 10^{-7}$

b) Qualitätskontrolle: n Werkstücke, s defekt, $w = n - s$ ok. Für Stichprobe der Größe m kann mit hypergeom. Vert. die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass Stichprobe genau k defekte Stücke enthält.

Was passiert, wenn der Gesamtumfang n der Urne immer größer wird ($n \to \infty$), dabei aber der relative Anteil der schwarzen Kugeln $\frac{s_n}{n}$ nahezu konstant bleibt bzw. gegen ein festes Verhältnis strebt ($\frac{s_n}{n} \to p$)?

Satz 2

Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig, aber fest gewählt. Gilt $\frac{s_n}{n} \to p$ für $n \to \infty$ und $0 < p < 1$, so folgt für $0 \leq k \leq m$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\binom{s_n}{k}\binom{n-s_n}{m-k}}{\binom{n}{m}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}.$$

Interpretation: Ist n (und damit auch s_n) groß gegenüber m, besteht nahezu kein Unterschied zwischen Ziehen mit und ohne Wiederholung. $p \approx \frac{s_n}{n}$ ist dann (nach Laplace-Annahme) die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen. Rechte Seite entspricht somit der Wahrscheinlichkeit, bei m Ziehungen von einer Kugel aus der Urne mit jeweils anschließendem Zurücklegen genau k schwarze Kugeln zu erhalten.

Beweis:

$$\frac{\binom{s_n}{k}\binom{n-s_n}{m-k}}{\binom{n}{m}} = \frac{m!}{k!(m-k)!} \cdot \frac{s_n!(n-s_n)!(n-m)!}{(s_n-k)!(n-s_n-(m-k))!n!}$$

$$= \binom{m}{k} \cdot \frac{s_n(s_n-1)\dots(s_n-k+1)}{n(n-1)\dots(n-k+1)} \cdot \frac{(n-s_n)(n-s_n-1)\dots(n-s_n-m+k+1)}{(n-k)(n-k-1)\dots(n-k-m+k+1)}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$$

da $\frac{s_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} p$, $\frac{s_n-1}{n-1} = \frac{s_n}{n-1} - \frac{1}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} p$, ebenso $\frac{s_n-l}{n-l} \to p$, $2 \le l \le k-1$.

Ferner $\frac{n-s_n}{n-k} = \frac{n}{n-k} - \frac{s_n}{n-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-p$, da $k \le m \ll n$,

ebenso $\frac{n-s_n-l}{n-k-l} \to 1-p$ für $1 \le l \le m-k+1$. $\square$

Definition 3

Sei $n \ge 1$ und $0 \le p \le 1$. Die auf $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$ durch

$$p_k = b_{n,p}(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

definierte Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt **Binomialverteilung**.

Multinomialverteilung

Bemerkung: Dass die $p_k = b_{n,p}(\{k\})$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$ definieren, folgt aus dem binomischen Lehrsatz:

$$\sum_{k=0}^{n} b_{n,p}(\{k\}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1.$$

Satz 3

Zu einer endlichen Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und ganzen Zahlen $n_1, \ldots, n_r \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$ gibt es genau

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}$$

Zerlegungen von A in Teilmengen $A_1, \ldots, A_r$ derart, dass A_i genau n_i Elemente enthält. Die Zahlen $\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}$ heißen Multinomialkoeffizienten.

Beweis: Induktion über n.

$n = 1$: Ist $A = \{a_1\}$, gibt es nur eine Zerlegung mit der geforderten Eigenschaft, nämlich $A_1 = A$ (und $A_2, \ldots, A_r = \emptyset$), und $\frac{1!}{1!0!\ldots 0!} = 1$.

$n \to n+1$: O.B.d.A. sei $A = \{1, \ldots, n+1\}$. Ferner seien $n_1, \ldots, n_r \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^r n_i = n+1$ gegeben und $n_r \geq 1$ (falls $n_r = 0$, vertausche die n_i entsprechend).

Die Menge der Zerlegungen von A mit der gewünschten Eigenschaft ist

$$E = \Big\{(A_1, \ldots, A_r) \,|\, A = \bigcup_{i=1}^r A_i,\ A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j,\ |A_i| = n_i, 1 \leq i \leq r\Big\}$$

Definiere ferner $F = \Big\{(C_1, C_2) \,|\, A = C_1 \cup C_2, C_1 \cap C_2 = \emptyset, |C_2| = n_r\Big\}$ und $A_0 = \{1, \ldots, n+1-n_r\}$.

Die Menge der Zerlegungen von A_0 in $r-1$ Teilmengen B_j mit $|B_j| = n_j$, $1 \leq i \leq r-1$ ist

$$G = \Big\{(B_1, \ldots, B_{r-1}) \,|\, A_0 = \bigcup_{j=1}^{r-1} B_j,\ B_i \cap b_j = \emptyset,\ |B_j| = n_j,\ 1 \leq j \leq r-1\Big\}$$

Definiere

$\varphi : E \to F \times G,\ \varphi((A_1, \ldots, A_r)) = \big(\big(\cup_{k=1}^{r-1} A_k, A_r\big), (B_1, \ldots, B_{r-1})\big),$

wobei die B_k wie folgt definiert sind: Ist $\bigcup_{k=1}^{r-1} A_k = \{m_1, \ldots, m_{n+1-n_r}\}$ mit $m_1 < \cdots < m_{n+1-n_r}$, so ist $B_k = \{1 \leq i \leq n+1-n_r \mid m_i \in A_k\}$ (die B_k enthalten also die Information über die Zerlegung von $\bigcup_{k=1}^{r-1} A_k$ in die einzelnen Mengen A_k).

Damit ist φ bijektiv und folglich $|E| = |F| \cdot |G|$.

Nach Induktionsannahme ist $|G| = \frac{(n+1-n_r)!}{n_1! \ldots n_{r-1}!}$ (beachte $n_r \geq 1$) und $|F| = \binom{n+1}{n_r}$ nach Satz 1. Es folgt $|E| = \frac{(n+1)!}{n_r!(n+1-n_r)!} \cdot \frac{(n+1-n_r)!}{n_1! \ldots n_{r-1}!} = \frac{(n+1)!}{n_1! \ldots n_r!}$.$\square$

Alternatives intuitives Argument: Erhalte eine Partition von A mit den gewünschten Eigenschaften durch Auswahl der n_1 Elemente für A_1 ($\binom{n}{n_1}$ Möglichkeiten nach Satz 1), dann der nächsten n_2 Elemente von A_2 ($\binom{n-n_1}{n_2}$ Möglichkeiten nach Satz 1) usw. Die Gesamtzahl der möglichen Partitionen von A in Teilmengen der gewünschten Größe ist dann

$$\binom{n}{n_1} \cdot \binom{n-n_1}{n_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n_r}{n_r} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{n_r!}{n_r!0!} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_r!}$$

Korollar 2 (Multinomialsatz)

$$(x_1+\dots+x_r)^n = \sum_{\substack{n_1,\dots,n_r\geq 0\\ \sum_{i=1}^r n_i=n}} \frac{n!}{n_1!\dots n_r!}\cdot x_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot x_r^{n_r}, \quad x_1,\dots,x_r\in\mathbb{R},\ n,r\in\mathbb{N}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}(x_1+\dots+x_r)^n &= \sum_{\substack{(A_1,\dots,A_r)\\ \text{Zerlegung}\\ \text{von}\,\{1,\dots,n\}}} \prod_{i=1}^r x_i^{|A_i|} = \sum_{\substack{n_1,\dots,n_r\geq 0\\ \sum n_i=n}} \sum_{\substack{(A_1,\dots,A_r)\\ \text{Zerlegung}\\ \text{mit}\,|A_i|=n_i}} \prod_{i=1}^r x_i^{n_i}\\ &\overset{\text{Satz 3}}{=} \sum_{\substack{n_1,\dots,n_r\geq 0\\ \sum n_i=n}} \frac{n!}{n_1!\dots n_r!}\prod_{i=1}^r x_i^{n_i} \qquad \square\end{aligned}$$

Folgerung: Für Parameter $p_1,\dots,p_r\geq 0$ mit $\sum_{i=1}^r p_i=1$ und $n,r\in\mathbb{N}$ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $P=M(n,r,p_1,\dots,p_r)$ auf dem Raum $\Omega=\{(n_1,\dots,n_r)\,|\,n_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^r n_i=n\}$ gegeben durch

$$P\big(\{(n_1,\dots,n_r)\}\big)=\frac{n!}{n_1!\dots n_r!}\cdot p_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{n_r}.$$

Diese Verteilung heißt **Multinomialverteilung**.

Beweis: $\sum_{\substack{n_1,\dots,n_r \geq 0 \\ \sum n_i = n}} \frac{n!}{n_1!\dots n_r!} \cdot p_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r} \overset{\text{Kor. 3}}{=} (p_1 + \cdots + p_r)^n = 1^n = 1.$

Beispiel: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei n Würfen mit einem fairen Würfel n_1-mal die 1, n_2-mal die $2, \dots, n_6$-mal die 6 zu erhalten, wobei $n_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{6} n_i = n$?

Setze $\Omega := \big\{(\omega_1, \dots, \omega_n) \,|\, \omega_i \in \{1, \dots, 6\}\big\}$
und $A := \big\{\omega \in \Omega \,\big|\, |\{i \,|\, \omega_i = j\}| = n_j,\, 1 \leq j \leq 6\big\}$.
Jedes $\omega \in A$ definiert eine geordnete Zerlegung von $\{1, \dots, n\}$ in 6 Teilmengen mit $|A_1| = n_1, \dots |A_6| = n_6$: A_1 enthält die Indizes aller ω_i aus ω mit $\omega_i = 1$, A_2 die Indizes aller ω_i aus ω mit $\omega_i = 2$ usw.
Nach Satz 3 ist $|A| = \frac{n!}{n_1!\dots n_6!}$ und nach dem Laplace-Ansatz somit
$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n!}{n_1!\dots n_6! \cdot 6^n}$

Die entsprechende Verteilung auf $\{(n_1, \dots, n_6) \,|\, n_i \geq 0,\, \sum_{i=1}^{6} n_i = n\}$ ist also eine Multinomialverteilung mit den Parametern
$n, 6, p_1 = \cdots = p_6 = \frac{1}{6}$.