Ausblick auf die allgemeine Wahrscheinlichkeitstheorie

Übersicht

Bisher	Künftig
Diskreter Ws-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$	Allgemeiner Ws-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$
Ω nichtleer, höchstens abzählbar $\mathfrak{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (Potenzmenge) $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ Ws-Maß (σ-additiv)	Ω nichtleer, beliebig (evtl. überabzählbar) $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ σ-Algebra $P : \mathfrak{A} \to [0,1]$ Ws-Maß (σ-additiv)

Für überabzählbare Grundräume Ω ist $\mathcal{P}(\Omega)$ i.a. zu groß, um darauf ein Ws-Maß mit gewünschten Eigenschaften definieren zu können, dies ist nur auf einer kleineren σ-Algebra möglich. ($\longrightarrow$ Maßtheorie, Analysis III)

Typisches Beispiel für überabzählbaren Gundraum

$(\Omega, \mathfrak{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ reelle Zahlen mit Borel-σ-Algebra

Definiere Ws-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ durch eine *Ws-Dichte f*, d.h. durch eine nicht-negative, messbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\lambda(\mathrm{d}x) = 1$, wobei $\int f(x)\,\lambda(\mathrm{d}x)$ das Lebesgue-Integral bezeichne.

Übersicht (Forts.)

$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ **diskret**	$(\Omega, \mathfrak{A}, P) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$
P definiert durch $p_i = P(\{\omega_i\})\ \forall \omega_i \in \Omega$, $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$: $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\})$	P definiert durch Ws-dichte f Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist $P(A) := \int_A f(x)\, \lambda(\mathrm{d}x)$
Sei Y ZV mit Verteilung P_Y	
$E[Y^r] = \sum_{\omega_i \in \Omega} Y(\omega_i)^r P(\{\omega_i\})$ $= \sum_{i \geq 1} y_i^r P_Y(\{y_i\})$	$E[Y^r] = \int_\Omega Y(\omega)^r \,\mathrm{d}P(\omega)$ $= \int_{\mathbb{R}} x^r f_Y(x)\, \lambda(\mathrm{d}x)$ (dabei sei f_Y die Dichte von P_Y)

Bemerkung: Für stetige Dichten f und $A = [a, b]$ entspricht

$$P([a, b]) = \int_{[a,b]} f(x)\, \lambda(\mathrm{d}x) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

dem bekannten Riemann-Integral.

Die Verteilungsfunktion einer ZV Y mit (stetiger) Dichte f_Y ist $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P_Y([-\infty, x]) = \int_{(-\infty,x]} f_Y(y)\, \lambda(\mathrm{d}y) = \int_{-\infty}^x f_Y(y)\, \mathrm{d}y$.

Insbesondere gilt $P(a \leq Y \leq b) = F_Y(b) - F_Y(a)$.

Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$

Die (eindimensionale) Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ ist ein Ws-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, definiert durch die Dichte $f_{N(\mu,\sigma^2)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit

$$f_{N(\mu,\sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

Berechnung des Erwartungswertes und der Varianz

Für eine ZV X mit $P_X = N(\mu, \sigma^2)$ ist

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{N(\mu,\sigma^2)}(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x \\
&\underset{y=x-\mu}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (y+\mu)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}y \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}y}_{=0 \text{ (Integrand ungerade: } g(-y) = -g(y))} + \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}y}_{=1 \text{ (Dichteeigenschaft!)}} = \mu
\end{aligned}$$

Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}x \underset{y=x-\mu}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (y+\mu)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (y^2 + 2\mu y + \mu^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}y + \mu^2$$

Partielle Integration liefert wegen $\left(e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\right)' = -\frac{y}{\sigma^2}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \frac{y}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}y$$

$$= -y \cdot \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}\, \mathrm{d}y$$

$$= 0 + \sigma^2$$

Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$

d.h. $E[X^2] = \sigma^2 + \mu^2$ und $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$.

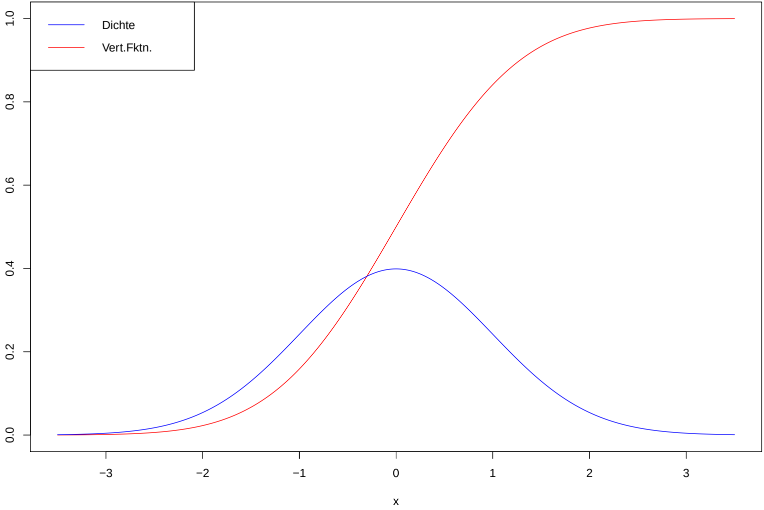
Mit $\mu = 0$, $\sigma = 1$ erhält man die **Standard-Normalverteilung $\mathbf{N(0,1)}$** mit Dichte $\varphi(x) := f_{N(0,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ und Verteilungsfunktion $\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\, \mathrm{d}x$. Diese liegt zumeist tabelliert vor.

Für eine ZV X mit $P_X = N(0,1)$ folgt aus der Symmetrie von $\varphi(x)$: $P(X \leq -x) = P(X \geq x) = 1 - P(X \leq x)$, d.h. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Falls Y eine ZV mit $P_Y = N(\mu, \sigma^2)$, hat $Y^* = \frac{Y-\mu}{\sigma}$ die Verteilung $P_{Y^*} = N(0,1)$ und somit

$$P(a \leq Y \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Dichte und Verteilungsfunktion von N(0,1)



Exponentialverteilung Exp(λ)

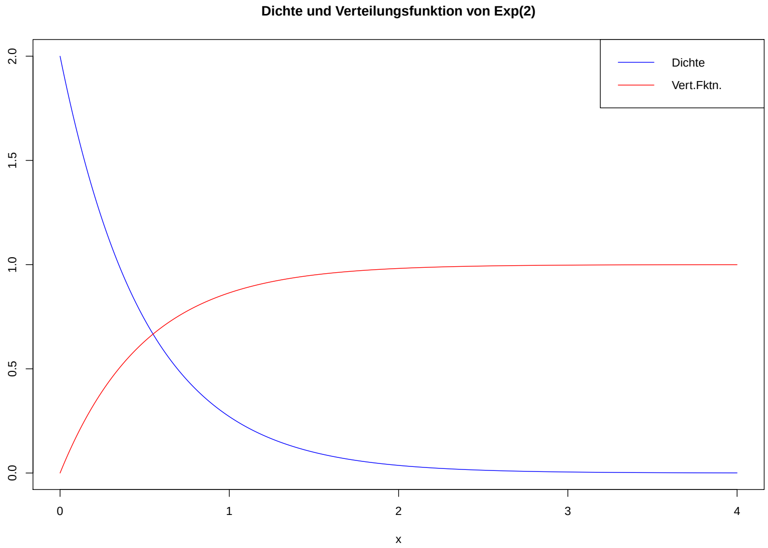
Die Exponentialverteilung Exp(λ) ist definiert durch ihre Dichte $f_{\mathrm{Exp}(\lambda)}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)$ ($\lambda > 0$) und hat die Verteilungsfunktion

$$F_{\mathrm{Exp}(\lambda)}(t) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \, \mathrm{d}s = \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)$$

Anwendung: Modell für Warte- oder Lebenszeiten

- Bei gleichartigen, unabhängig voneinander auftretenden Ereignissen: Wartezeit bis zum nächsten Ereignis (Anruf in einer Telefonzentrale, Zerfall eines Atoms in einer radioaktiven Materialprobe, Autounfall an verkehrsreicher Kreuzung, ...)
- Lebensdauer von Geräten, Glühbirnen, elektronischen Bauteilen (=Wartezeit bis zum (ersten) Ausfall)

In diesem Fall kann der Parameter λ als Ereignisrate (Anzahl Ereignisse pro Zeiteinheit) aufgefasst werden.


Dichte und Verteilungsfunktion von Exp(2)
Dichte
Vert.Fktn.
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
0
1
2
3
4
x

Exponentialverteilung Exp(λ)

Sei T eine exponentialverteilte ZV mit $P_T = \mathrm{Exp}(\lambda)$, dann ist für $0 \leq s < t$ die Wahrscheinlichkeit $P(s \leq T \leq t) = e^{-\lambda s} - e^{-\lambda t}$ und

$$\begin{aligned} E[T] &= \int_0^\infty t \cdot \lambda\, e^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t = -t \cdot e^{-\lambda t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

(je größer die Ereignisrate, desto kleiner die Wartezeit bis zum nächsten Ereignis) sowie

$$\begin{aligned} E[T^2] &= \int_0^\infty t^2 \cdot \lambda\, e^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t = -t^2 \cdot e^{-\lambda t}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^\infty 2t \cdot e^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t \\ &= -\frac{2t}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t}\Big|_0^{+\infty} + \frac{2}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

also ist $\mathrm{Var}(T) = E[T^2] - E[T]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

Exponentialverteilung $\mathrm{Exp}(\lambda)$

Die Exponentialverteilung kann auch als „stetige Version der geometrischen Verteilung" aufgefasst werden:

Erinnerung: Geometrische Verteilung beschreibt Wartezeit bis zum ersten Erfolg bei unabhängigen Wiederholungen eines Experiments mit Erfolgswahrscheinlichkeit p: $P(\{n\}) = p \cdot (1-p)^{n-1}$.

Annahme: Experiment wird in kurzen Zeitintervallen Δt wiederholt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $\lambda \Delta t$.

Sei T die Wartezeit bis zum ersten Erfolg. Wenn dieser zur Zeit t auftritt, hat man ungefähr $n \approx \frac{t}{\Delta t}$ Versuche benötigt, d.h.

$$P(T = t) \approx \lambda \Delta t (1 - \lambda \Delta t)^{\frac{t}{\Delta t} - 1} \quad \text{bzw.} \quad P(t < T \leq t + \Delta t) \approx \lambda \Delta t (1 - \lambda \Delta t)^{\frac{t}{\Delta t}}$$

Durch Grenzübergang $\Delta t \to dt$ (d.h. das Zeitintervall wird infinitesimal klein) erhält man (formal)

$$P(T \in (t, t + dt]) = \lambda e^{-\lambda t} dt \quad \text{und damit} \quad P(s \leq T \leq t) = \int_s^t \lambda e^{-\lambda r} \, \mathrm{d}r.$$